（令和２年８月２２日実施）

令和 3 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）: **問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - 観測天文学・理論宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。
  - 惑星宇宙グループ・宇宙物質科学グループ・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI,VII** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	4 枚 (A4)
	問題 IV	3 枚 (A4)
	問題 V	2 枚 (A4)
	問題 VI	4 枚 (A4)
	問題 VII	3 枚 (A4)
解答紙	2 問題分	6 枚 (B4)（各問題 3 枚）
草案紙	2 問題分	2 枚 (B4)（各問題 1 枚）

問題 III

問 1 質量 m、振動数 ω の 1 次元調和振動子のハミルトニアンは $H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ で与えられる。q と p はそれぞれ、座標と運動量の演算子である。

1-1. 昇降演算子 a と $a^\dagger$ を次のように定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p,$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p.$$

$[a, a^\dagger] = 1$ を示せ。

1-2. ハミルトニアン H_0 を q と p の代わりに a と $a^\dagger$ で表せ。

1-3. 状態 $|0\rangle$ を $a|0\rangle = 0$、$\langle 0|0\rangle = 1$ で定義する。状態 $|n\rangle = \mathcal{N}_n (a^\dagger)^n |0\rangle$ ($\mathcal{N}_n$ は定数、$n = 0, 1, 2, \ldots$) が H_0 の固有状態であることを示し、また $|n\rangle$ のエネルギー固有値 E_n と $\langle n|n\rangle = 1$ となるように決定した規格化定数 $\mathcal{N}_n$ を求めよ。

次に、上の調和振動子のハミルトニアンに、外から時間的に変化する摂動 $V(t) = f(t)q$ を加える。ただし、

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^2 + \tau^2} \tag{1}$$

であり、λ と τ は実定数である。

1-4. 状態 $|\psi(t)\rangle$ がハミルトニアン $H = H_0 + V(t)$ のシュレーディンガー方程式の解であるとする。状態 $|\varphi(t)\rangle$ を $|\varphi(t)\rangle = e^{(i/\hbar)H_0 t}|\psi(t)\rangle$ で定義するとき、$|\varphi(t)\rangle$ が満たす微分方程式は次の形になる。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(t)\rangle = U(t)|\varphi(t)\rangle \tag{2}$$

相互作用表示の摂動ハミルトニアン $U(t)$ を昇降演算子 a と $a^\dagger$ を使って表せ。ただし、以下の式を使ってよい。

$$e^{\beta a^\dagger a} a^\dagger e^{-\beta a^\dagger a} = e^\beta a^\dagger \quad (\beta\text{は定数}) \tag{3}$$

1-5. 時刻 $t = -\infty$ に、系はある状態 $|\varphi(-\infty)\rangle$ にあった。時刻 $t = +\infty$ の状態 $|\varphi(+\infty)\rangle$ は、

$$|\varphi(+\infty)\rangle = \exp[-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, U(t)]|\varphi(-\infty)\rangle \tag{4}$$

と表せる。ここで、時間についての積分を実行すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, U(t) = \hbar\, A(a + a^\dagger) \tag{5}$$

の形に表すことができる。この定数 A を求めよ。

1-6. 初期状態を $|\varphi(-\infty)\rangle = |0\rangle$ とする。演算子 X、Y の交換子 $[X, Y]$ が c 数であるとき、

$$e^{X+Y} = e^{Y} e^{X} e^{\frac{1}{2}[X,Y]} \tag{6}$$

と変形できることを使って、$|\varphi(+\infty)\rangle$ を完全系 $\{|n\rangle, n = 0, 1, \ldots\}$ で展開し、

$$|\varphi(+\infty)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \tag{7}$$

と表すことにする。このとき、展開係数 c_n を定数 A を使って表せ。また、状態 $|n\rangle$ への遷移確率 P_n も定数 A を使って表せ。

問 2 質量 m の質点が一次元ポテンシャル $V(x)$ 中を運動している。$V(x)$ は図 1 のように $x \to \pm\infty$ で $V(x) \to 0$ となる。

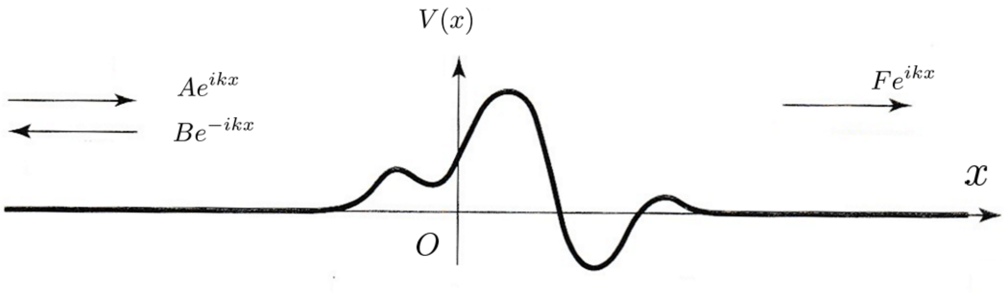


図 1

2-1. 波動関数を $\psi(x,t)$ とする。確率の流れの密度

$$j(x,t) = -i\frac{\hbar}{2m}[\psi^* \frac{\partial}{\partial x}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial x}\psi^*] \tag{8}$$

が、以下の連続の方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

ここで、$\rho(x,t)$ は確率密度であり、$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ と与えられる。

2-2. 図 1 のように粒子が $x = -\infty$ からポテンシャルの領域に入り、その一部が反射され、残りが透過する問題を考える。波動関数が $x \to \pm\infty$ で次のようにふるまうとき、粒子の反射率 R と透過率 T を A、B、F を用いて表せ。

$$\psi(x,t) \to (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-iEt/\hbar}, \qquad (x \to -\infty) \tag{10}$$

$$\psi(x,t) \to Fe^{ikx}e^{-iEt/\hbar}, \qquad (x \to +\infty) \tag{11}$$

A、B、F は定数であり、波数は k、エネルギーは $E = \hbar^2 k^2/(2m)$ で表される。

次に、図 2 のように、ポテンシャルが

$$V(x) = -V_0 \qquad (0 < x < \ell) \tag{12}$$
$$V(x) = 0 \qquad (x < 0, x > \ell) \tag{13}$$

で与えられるとき、以下の問いに答えよ。ここで、V_0 は正の定数である。

2-3. 波動関数を

$$\psi(x,t) = (Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x})e^{-iEt/\hbar}, \qquad (x < 0) \tag{14}$$
$$\psi(x,t) = (Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x})e^{-iEt/\hbar}, \qquad (0 < x < \ell) \tag{15}$$
$$\psi(x,t) = Fe^{ik_1x}e^{-iEt/\hbar}, \qquad (x > \ell) \tag{16}$$

と置く。ただし、エネルギー $E > 0$、波数 $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$、波数 $k_2 = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar$ であり、また A、B、C、D、F は定数である。

波動関数 $\psi(x,t)$ とその 1 階微分 $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)$ は $x = 0$ と $x = \ell$ で連続でなければならないが、その理由を説明せよ。

2-4. $x = 0, \ell$ における波動関数の接続条件より、 このポテンシャルによる反射率 R を計算せよ。

2-5. 粒子が反射されない場合のエネルギー E の値を全て求めよ。

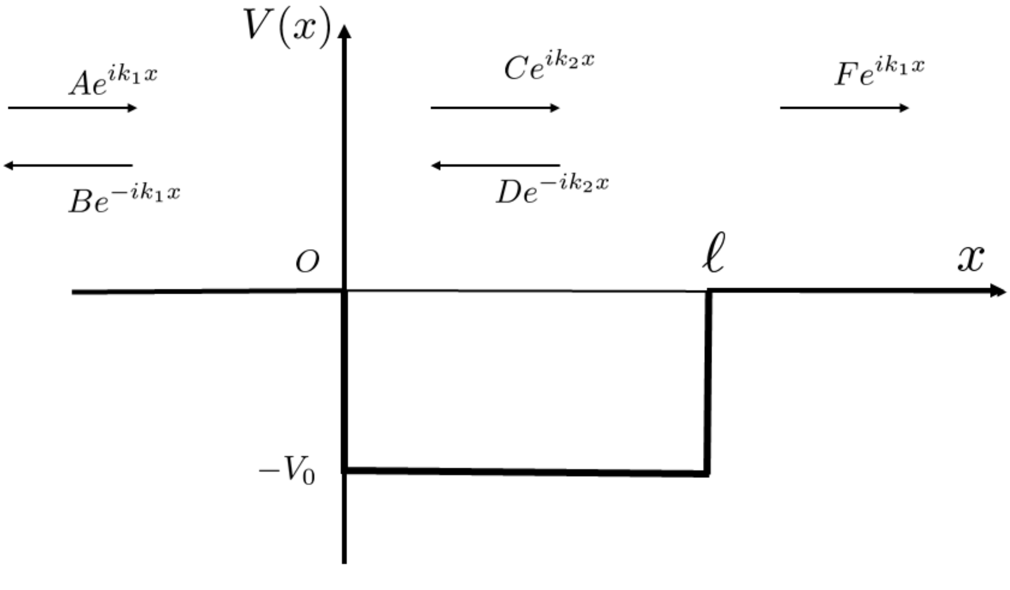


図 2

問題 IV

問 1 体積 V の容器内に質量 m の同種単原子分子 N $(\gg 1)$ 個からなる理想気体が閉じ込められており、温度 T の熱平衡状態にある。この系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は、$\vec{p_i}$ を分子 i の運動量として、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{|\vec{p_i}|^2}{2m}$$

で与えられる。この系を古典統計力学で扱いカノニカル分布の方法を用いて以下の設問に答えよ。ただし、Boltzmann 定数は k_B、Planck 定数は h とし、計算に必要なら、

$$\text{Stirling の公式} \quad \log N! = N \log N - N \qquad (N \gg 1)$$
$$\text{積分公式} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

を用いてよい。

1-1. この気体の分配関数 $Z(N,T,V)$ を求め、Helmholtz の自由エネルギー $F(N,T,V)$ を計算せよ。

1-2. この気体の内部エネルギー $U(N,T,V)$ を求めよ。

1-3. この気体の圧力 $P(N,T,V)$ を求めよ。

1-4. この気体のエントロピー $S(N,T,V)$ を求め、示量変数であることを示せ。

問 2 全部で N 個の格子点をもつ周期境界条件を課した規則格子上に Ising スピン $S_i = \pm 1$ $(i = 1, \cdots, N)$ が置かれている。全ての格子点はそれぞれ z 個の最隣接格子点をもち、各スピンは最隣接格子点上のスピンとのみ相互作用するものとする（図 1 ）。スピン 1 個の磁気モーメントの大きさを m とし、この系に磁場 H が印加されているとすると、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(i,j)} S_i S_j - mH \sum_{i=1}^{N} S_i \qquad [J \text{ は正の定数で } (i,j) \text{ は最隣接格子点のペア }]$$

で与えられる。この系が温度 T の平衡状態にあるとして、平均場近似を適応する。この近似では 1 つのスピン S_i だけに着目し、その z 個の最隣接スピン S_j をすべて同じ値の平均値 $\langle S \rangle$ で置き換える（図 2 ）。i 番目のスピン S_i とそのまわりのスピンとの相互作用だけを考慮した近似ハミルトニアン $\mathcal{H}_i$ は

$$\mathcal{H}_i = -zJ\langle S \rangle S_i - mHS_i$$

と書くことができる。このとき、以下の問に答えよ。ただし、Boltzmann 定数を k_B として $\beta = 1/k_B T$ であり、x が小さいとき $\tanh x \simeq x - x^3/3$ と近似されることを使ってよい。

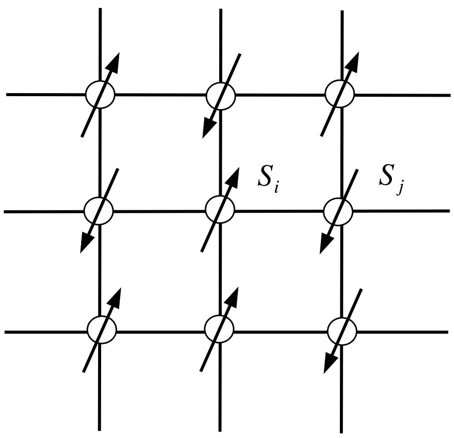


図 1

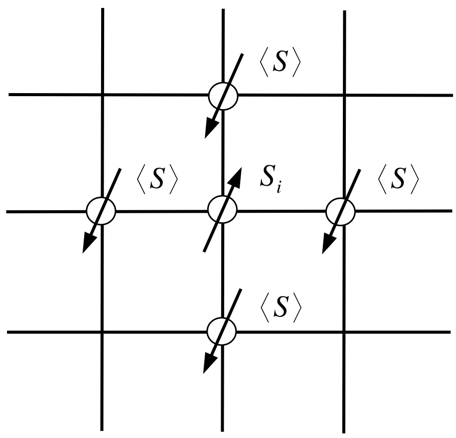


図 2

2-1. $\mathcal{H}_i$ に対し分配関数 Z_i を計算せよ。

2-2. Z_i から S_i の平均値 $\langle S_i \rangle$ を計算せよ。平均場近似では $\langle S_i \rangle = \langle S \rangle$ が成立すると仮定する。このとき、$\langle S \rangle$ が方程式

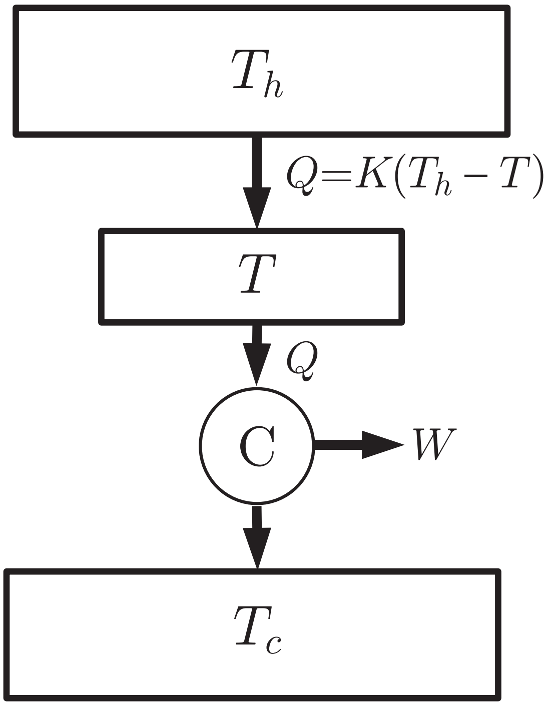
$$\langle S \rangle = \tanh\left[\beta(zJ\langle S \rangle + mH)\right]$$

を満たすことを導け。

2-3. この系を強磁性体のモデルとして考えるとき、$H = 0$ のときに上の方程式に $\langle S \rangle \neq 0$ の解が存在することは、自発磁化の発生を意味する。このことから、自発磁化の現れる転移温度 T_c を求め、$\langle S \rangle$ を温度 T の関数として図示せよ。

2-4. $H = 0$ かつ、T が T_c 付近で $T < T_c$ のとき、$\langle S \rangle \simeq A\sqrt{T_c - T}$ の形に書けると仮定して、定数 A を求めよ。

問 3 下図のような温度 T_h と T_c $(< T_h)$ の 2 つの熱浴の間で動作する熱機関 C を考える。この熱機関は準静的ではなく、有限時間で 1 サイクル動作するものとする。また、この熱機関には温度 T の中間的な熱溜めがあり、単位時間に、高温熱浴から熱溜めに $Q = K(T_h - T)$（K は温度によらない正の定数）の熱が流れる。1 サイクルにかかる時間は単位時間に比べ十分に短く、熱機関が定常的に熱を仕事に変換しているように扱って、熱溜めの状態も変化しないものとすると、単位時間に熱溜めから熱機関 C に流れる熱も Q となる。熱機関 C は準静的ではないものの効率 η は非常によく、熱溜めと低温熱浴の間ではカルノー効率 $\eta = 1 - \dfrac{T_c}{T}$ で動作していると近似できるとする。



3-1. 熱機関 C が単位時間に外部にする仕事 W を K, T_h, T_c, T を用いて表わせ。

3-2. W を最大にする熱溜めの温度 T を求め、そのときの熱機関 C の効率 η が

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}}$$

と書けることを示せ。