（平成 21 年 8 月 19 日実施）

平成22年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも**問題 I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

（平成 21 年 8 月 19 日実施）

平成 22 年度

北海道大学大学院理学院　量子理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間：　13:00〜15:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：**問題 III, IV** を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：

– 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題 III, IV** を解答すること。

– 理論惑星科学・実験宇宙科学・惑星物理学・飛翔体観測を志望するものは**問題 III, IV, V, VI** の中から 2 つの問題を選択して解答すること。

- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2 枚
	問題 IV	1 枚
	問題 V	2 枚
	問題 VI	3 枚
解答紙	２問題分	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	２問題分	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

xyz 座標系の z 軸を鉛直上向きにとり、この z 軸を対称軸とし座標原点が頂点である放物面を考える。この放物面の方程式を $z = a(x^2 + y^2)$ とする (a は正の定数)。質量 m の質点がこの放物面にそって運動するとき、次の問いに答えなさい。ここで、重力加速度の大きさを g とする。また、質点と放物面の間の摩擦は無視できる。

問 1 質点が $x = b,\ y = 0,\ z = ab^2$ から時刻 $t = 0$ に速度ゼロで運動を開始した (図 1)。以下の、**1-1** から **1-5** について答えなさい。

1-1. 質点が運動開始後はじめて $z = 0$ に到達したときの速度の大きさを求めなさい。

1-2. 質点が $z = 0$ に到達したとき、放物面から受ける抗力は z 方向である。その大きさを T_0 とおいて、その瞬間の運動方程式の x 成分と z 成分を書きなさい。

1-3. 質点が xz 平面内の放物線 $z = ax^2$ 上を運動することから、速度の z 成分 $\dot{z}$ を x、$\dot{x}$ を用いて表しなさい。また、加速度の z 成分 $\ddot{z}$ を x、$\dot{x}$、$\ddot{x}$ を用いて表しなさい。

1-4. 以上の結果を用いて、質点が $z = 0$ で放物面から受ける抗力の大きさ T_0 を求めなさい。

1-5. つぎに、bが十分小さいとする (図２：参考のために質点の位置おける放物線の接線を破線で、抗力 T の方向を矢印で示した)。この場合、質点の座標値や速度の値は微小量であり、運動方程式の中の微少量の 2 次以上の項は無視できるとする。このとき、時刻 t における質点の位置を求めなさい。また、質点が運動を開始後はじめて原点に到達する時刻が b によらないことを示し、その理由を簡単に説明しなさい。

問 2 xy 平面と平行で $z = h$ の高さにある放物面上の円軌道を考える（図３）。質点がこの円軌道上を運動をするときの角速度の大きさ ω を求めなさい。また、この質点が円軌道を一周する周期 P、および放物面から受ける抗力の大きさ T を求めなさい。

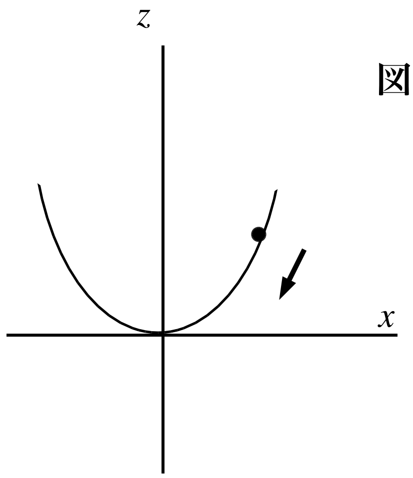

図1

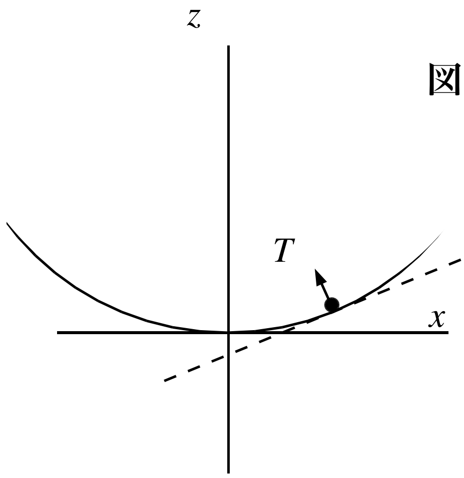

図2

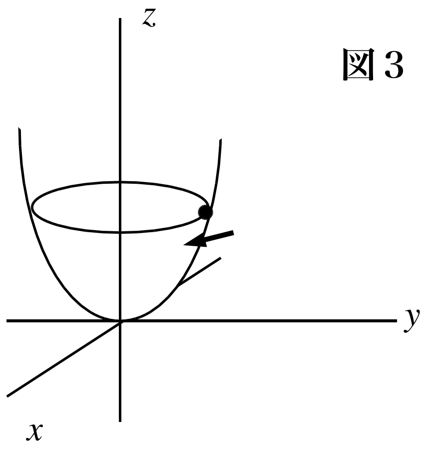

図3

問題 II

問 1 物理量の単位は基本単位で書き下せる。単位に関して以下の問に答えよ。

1-1. SI 単位系における以下の物理量の単位を SI の 4 つの基本単位 [m], [kg], [s], [A] を用いて表せ。

(1) 電場 (2) 電束密度 (3) 磁束 (4) キャパシタンス (5) 抵抗

1-2. 静電単位系では、基本単位は [cm], [g], [s] であり、クーロンの法則は、以下のように記述される。

$$F = \frac{qq'}{r^2}$$

静電単位系での電荷の単位を基本単位を用いて表せ。また、1 [C] の電荷量の静電単位系での値を求めよ。ただし、真空中の光速を $c = 3.0 \times 10^8$[m] [s]$^{-1}$ とする。また、SI 単位系での電流の大きさは、1 [m] 離れた並行電線間に 同じ大きさの電流を流したとき電線の 1[m] あたりに働く力の大きさが 2×10^{-7} [N] となる電流を 1 [A] とする。

問 2 真空中において静電ポテンシャルが次の式で与えられるとき

$$\varphi(x, y, z) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

以下の問いに答えよ。ただし A は定数で $(x, y, z) \neq$ (0,0,0) とする。 また、真空の誘電率を ϵ_0 [C]^2[N]$^{-1}$[m]$^{-2}$ とする。

2-1. 位置 $(x, y, z) \neq$ (0,0,0) での電場を求めよ。

2-2. 位置 $(x, y, z) \neq$ (0,0,0) での電荷密度を求めよ。

問 3 図 1 のような半径 a [m] の中心導体の外側に半径 b [m] の金属の円筒をかぶせた中空の長さ l [m] の円筒コンデンサを考える。真空の誘電率を ϵ_0 [C]^2[N]$^{-1}$[m]$^{-2}$ とする。以下の設問でコンデンサの端の効果はないものとする。

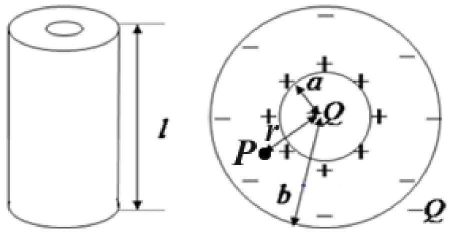

図 1: 左:立体図 右:断面図

3-1. 中心導体に $+Q$ [C]、外部導体に $-Q$ [C] 帯電させた場合、図中の半径 r [m] $(a < r < b)$ の位置 P での電場の方向を図示し、その大きさを求めよ。

3-2. このコンデンサの静電容量を求めよ。

問 4 図 2 のように透磁率 μ [N][A]$^{-2}$ の 内径 a [m]、外径 b [m]、厚さ t [m] のトロイダルコアに 8 回銅線を巻いたコイルを考える。真空の透磁率を μ_0 [N][A]$^{-2}$ としたとき、$\mu \gg \mu_0$ とする。この場合、コアの中心から等距離にある円周上では、磁場の大きさは等しいとしてよい。また、断面図の $\odot$ は電流が紙面裏から表に流れていることを示し、$\otimes$ は電流が、表から裏に流れていることを示す。

4-1. 銅線に電流 I [A] を流したとき図中の半径 r [m] $(a < r < b)$ の位置 P での磁束密度の方向を図示し大きさを答えよ。

4-2. このコイルのインダクタンスを求めよ。

4-3. $\mu \sim \mu_0$ となった場合、実際のインダクタンスは上の設問の計算値に対してどうなるか、理由をつけて述べよ。

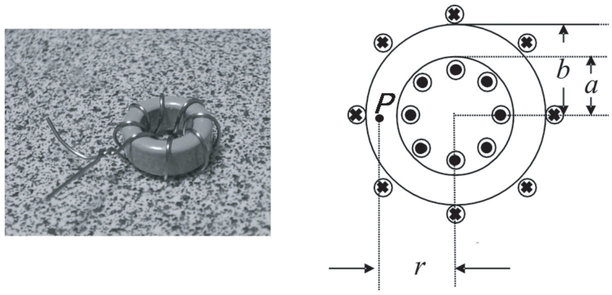

図 2: 左:実物写真 右:断面図

問題 III

問 1 軌道角運動量の演算子は $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と表せる。ここで $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ とする表記法を使うと角運動量の成分の交換関係は $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \hat{L}_l$ となる。ϵ_{jkl} は反対称テンソルで $\epsilon_{123} = 1$ とする。

1-1. $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$ を示せ。

このことから、角運動量の大きさと角運動量の第３成分は、同時に対角化でき、次のような角運動量の固有状態が定義できるものとする。

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 |l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l, m\rangle, \qquad \hat{L}_3 |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle,$$

ここで $|l, m\rangle$ は表示依存性のない状態ベクトルを表し、例えば極座標表示ではその波動関数は球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ で表される。

1-2. $\hat{L}_\pm = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$ を定義したとき、$\hat{L}_+ |l, m\rangle$ 及び $\hat{L}_- |l, m\rangle$ が $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ 及び $\hat{L}_3$ の固有状態であることを具体的に示し、それぞれの固有値を求めよ。

1-3. 次の関係式を証明せよ。
$\hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 = \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hbar \hat{L}_3 = \hat{L}_+ \hat{L}_- - \hbar \hat{L}_3$
次に、それらが成り立つことから、角運動量の固有状態 $|l, m\rangle$ の m の最大値 m_{max} 及び最小値 m_{min} は $m_{max} = l, \;\; m_{min} = -l$ となることを示せ。

問 2 波動関数の座標表示が次の式で与えられているものとする：

$$\psi(\boldsymbol{r}) = NR(r) \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i x_i}{r}$$

ここで $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$、$a_i \; (i = 1, 2, 3)$ は定数で、

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i|^2 = 1$$

を満たしている。また $R(r)$ は無限遠方で振る舞いの良い関数とし、N は規格化定数として与えられているものとする。

2-1. この波動関数の状態が $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ の固有状態であることを示し、固有値を求めよ。必要なら、次頁の極座標表示を用いてよい。

2-2. この波動関数が、$\hat{L}_3$ の固有状態になるとき、a_i を決定して波動関数を書き下し、それらに対応する固有値を求めよ。

次の極座標表示を用いてよい。

$$x_1 = r\sin\theta\cos\phi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\phi, \quad x_3 = r\cos\theta$$
$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ + \ \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \ + \ \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$
$$\hat{L}_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

問 3 軌道角運動量の大きさ $l = 1$ を持つ二つの粒子が存在する。**問 1** の結果を踏まえ二つの軌道角運動量の合成を行い、規格化された波動関数をすべて書き下せ。

ここで粒子 1 と粒子 2 を上付き添え字 (1),(2) で区別したとき、角運動量 $\hat{L}_j^{(a)}$ は、それぞれ**問 1** で与えられた角運動量の交換関係を満たしているものとし、粒子 1,2 に対応する角運動量は交換する：$[\hat{L}_i^{(1)}, \hat{L}_j^{(2)}] = 0$。また**問 1** で与えた状態ベクトルの表記法 $|l, m\rangle^{(a)}$ で、次のような簡略化した表記を用いてよい。
$|1, +1\rangle^{(a)} = |+\rangle^{(a)}, |1, 0\rangle^{(a)} = |0\rangle^{(a)}, |1, -1\rangle^{(a)} = |-\rangle^{(a)}$ $(a = 1, 2)$、
また合成系に対しては、
$|+\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)} = |+, +\rangle, \quad |+\rangle^{(1)}|0\rangle^{(2)} = |+, 0\rangle, \quad |+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} = |+, -\rangle$...
と表す。

問題 IV

気体の定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_P について考える。エントロピーを S，温度を T，圧力を P，体積を V として，それぞれ $C_V \equiv T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, $C_P \equiv T\left(\dfrac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ と定義される。温度変化に際して粒子数 N は一定に保たれるものとし，以下においても，偏微分における粒子数一定を表す下付き添え字 N は省略してよい。Boltzmann 定数を k_{B}，Planck 定数を h と表すことにする。

問 1 まず，熱力学の方法論を用いて考察しよう。

1-1. エントロピーを温度，圧力の関数 $S(T,P)$ と考えて, 全微分 $\mathrm{d}S$ を $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}P$ を用いて表せ。

1-2. 圧力を温度，体積の関数 $P(T,V)$ と考えて, 全微分 $\mathrm{d}P$ を $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}V$ を用いて表せ。

1-3. Gibbs の自由エネルギーを微分して得られる Maxwell の関係式を用いることにより，$\left(\dfrac{\partial S}{\partial P}\right)_T$ を S を用いない T,P,V 間の偏微分の形に表せ。

1-4. エントロピーは圧力を介した温度，体積の関数, すなわち $S(T,P(T,V))$ と考えられる。これを考慮して C_V と C_P の関係を T, P, V 及びその間の偏微分を用いて表せ。

1-5. $PV = Nk_{\mathrm{B}}T$ を満たす理想気体について, C_V と C_P の関係を与えよ。

1-6. $\left(P+\dfrac{aN^2}{V^2}\right)(V-bN) = Nk_{\mathrm{B}}T$ を満たす van der Waals 気体について, C_V と C_P の関係を与えよ。ここに a,b は正の定数とする。

1-7. $C_P - C_V$ の値は一般に正負いずれであるか。またその絶対値は理想気体と van der Waals 気体でどちらが大きいだろうか。理由を付して述べよ。

問 2 次に，統計力学の方法論を用いて考察しよう。質量 m の単原子 N 個からなる理想古典気体を考える。

2-1. 温度 T，体積 V のもとで正準分布を適用し，分配関数 $Z(T,V,N)$ を求めよ。

2-2. 温度 T，圧力 P のもとで大正準 T-p 分布を適用し，大分配関数 $Y(T,P,N)$ を求めよ。

2-3. Helmholtz の自由エネルギー $F(T,V,N) = -k_{\mathrm{B}}T\ln Z(T,V,N)$ から定積熱容量 C_V を，Gibbs の自由エネルギー $G(T,P,N) = -k_{\mathrm{B}}T\ln Y(T,P,N)$ から定圧熱容量 C_P を，それぞれ求めよ。