

(令和3年8月19日実施)

令和4年度

北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士(博士前期)課程入学試験 専門科目問題(午後)

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者(宇宙理学専攻を併願する者を含む)：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - － 観測天文学、理論宇宙物理学、素粒子・宇宙論、原子核理論、情報メディア科学、原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
 - － 理論惑星科学、惑星宇宙グループ、宇宙物質科学、相転移ダイナミクス、飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI の中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 III	2枚
	問題 IV	2枚
	問題 V	2枚
	問題 VI	1枚
解答紙	2問題分	6枚(各問題3枚)
草案紙	2問題分	2枚(各問題1枚)

問題 III

問 1 一様な静磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ 中にある質量 m 、電荷 q の粒子を考える。ここでは、 $B > 0$ 、 $q > 0$ とし、 \mathbf{B} をもたらすベクトルポテンシャルを $\mathbf{A}(x) = (0, Bx, 0)$ とする。また、位置演算子 $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ と運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ は、交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ を満たすものとして、以下のハミルトニアンを考える：

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \left[\hat{\mathbf{p}} - \frac{q}{c} \mathbf{A}(\hat{x}) \right]^2, \quad (c: \text{光速}).$$

1-1. 運動量の y 、 z 成分が保存量であること、すなわち $[\mathcal{H}_0, \hat{p}_y] = [\mathcal{H}_0, \hat{p}_z] = 0$ を示せ。

この粒子の z 方向の運動は x - y 面内の運動に影響を与えないので、以下では z 方向成分を無視したハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[\hat{p}_x^2 + \left(k_y - \frac{qB}{c} \hat{x} \right)^2 \right], \quad (k_y : \hat{p}_y \text{の固有値}),$$

を考える。ここで、以下の生成・消滅演算子を導入する：

$$\hat{\alpha}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\left(\hat{x} - \frac{ck_y}{qB} \right) - \frac{i}{m\omega} \hat{p}_x \right], \quad \hat{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left[\left(\hat{x} - \frac{ck_y}{qB} \right) + \frac{i}{m\omega} \hat{p}_x \right], \quad \left(\omega = \frac{qB}{mc} \right).$$

1-2. $[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1$ を示せ。

1-3. 数演算子 $\hat{N} = \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha}$ を用いて、 $\mathcal{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$ となることを示せ。

この系は調和振動子系とみなすことができ、その固有状態は数演算子 \hat{N} の固有状態となる。系の範囲を $(-\infty \leq x \leq \infty, 0 \leq y \leq L)$ とし、 y 方向には周期境界条件を課して、この系の基底状態について考える。基底状態の波動関数 $\psi_0(x, y)$ は、

$$\psi_0(x, y) = \phi_0(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} k_y y\right),$$

と変数分離した形で表すことが出来る。

1-4. y 方向の周期境界条件から、 k_y の具体的表式を示せ。

1-5. $\phi_0(x)$ のみたす微分方程式を導出し、規格化された $\psi_0(x, y)$ を求めよ。

1-6. 1-4. と 1-5. の結果から、基底状態は縮退していることがわかる。確率密度 $|\psi_0(x, y)|^2$ の概形を示し、縮退した各状態がどのように空間分布しているか、簡潔に述べよ。

1-7. 面積 $L \times L$ 正方形内の縮退状態の数 W を評価し、縮退度 $\Phi (= W/L^2)$ の具体的表式を示せ。

問 2 電子のスピン角運動量演算子を \hat{s} とする。 \hat{s}^2 と \hat{s}_z の同時固有状態 $|s, m\rangle$ は、 $\hat{s}^2|s, m\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, m\rangle$ 、 $\hat{s}_z|s, m\rangle = \hbar m|s, m\rangle$ を満たし、 $s = \frac{1}{2}$ 、 $m = \pm\frac{1}{2}$ である。以下では簡単のため

$$|+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad |-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

とする。また、パウリスピン演算子 $\hat{\sigma}$ を用いて、 $\hat{s} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$ と表すことができる。 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ を

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

というベクトルで与えられる表現基底とすると、 $\hat{\sigma}$ は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

という行列で表すことが出来る。

このスピンに x 軸方向振動磁場 $\mathbf{B} = (B \cos \omega t, 0, 0)$ が印加されている。系のハミルトニアンは、相互作用定数 λ を用いて、

$$\mathcal{H} = -\lambda(\mathbf{B} \cdot \hat{s}) = -\lambda B \hat{s}_x \cos \omega t,$$

と与えられる。

2-1. \hat{s}^2 と \hat{s}_z の交換関係を示せ。

2-2. \hat{s}_x の固有値、および規格化した固有状態を $|+\rangle$ と $|-\rangle$ の線形結合で表せ。

2-3. $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \mathcal{H} |\psi(t)\rangle$ より、時刻 t の状態 $|\psi(t)\rangle$ を求めよ。ここで、時刻 $t=0$ でスピンは z 軸負方向を向いていた。つまり $|\psi(0)\rangle = |-\rangle$ とする。

問題 IV

問 1 気体の不可逆的断熱変化におけるエントロピー増大の法則について考察する。

まず準備として、気体のエントロピー S について次の問いに答えよ。

- 1-1. S を内部エネルギー U と体積 V の関数 $S(U, V)$ とみなすとき、気体の絶対温度 T と圧力 P を用いてその全微分 dS を書き下せ。
- 1-2. 定積モル比熱が C_V である n モルの理想気体について、 T と P を U と V の関数として表せ。ただし気体定数を R とする。
- 1-3. 以上のことから、この理想気体のエントロピー変化 $\Delta S = S(U, V) - S(U_0, V_0)$ を求めよ。

図1のように、断熱材でできたシリンダ内に摩擦のない可動ピストンで前問 1-2. の理想気体を封入し、一定の外圧 P_0 をかけたところ、気体は体積 V_0 の熱平衡状態になった。次に、その状態から突然外圧を P_1 に変えたところ、暫くして体積 V_1 の熱平衡状態になった。

- 1-4. 外圧変化後の体積 V_1 を求めよ。
- 1-5. 外圧を x 倍にしたとき（すなわち $P_1 = xP_0$ としたとき）体積 V と内部エネルギー U はそれぞれ何倍になるか。
- 1-6. この外圧変化の前後におけるエントロピー変化 ΔS を x の関数として求めよ。
- 1-7. 任意の $x > 0$ に対して $\Delta S \geq 0$ であることを示せ。

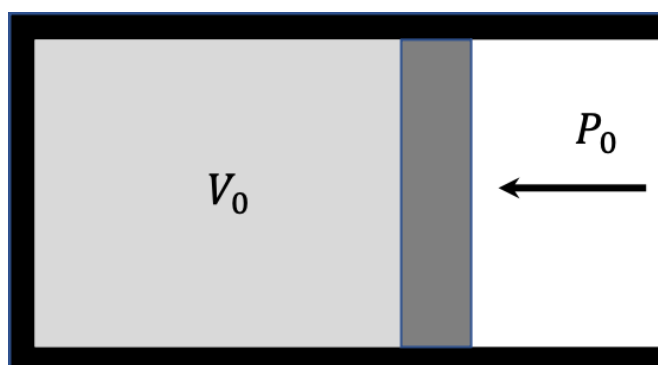


図 1

問 2 図2のように、相互作用をしない質量 m の同種粒子 N 個からなる気体をシリンダ内に入れ、質量 M の摩擦のない可動ピストンで封入し、一定の外圧 P をかけながら温度 T の熱浴と接触させた。 j 番目の粒子の運動量と位置ベクトルを $\mathbf{p}_j, \mathbf{r}_j$ として、気体とピストンを合わせた系のハミルトニアンが

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m} + \frac{p_p^2}{2M} + PAx_p$$

と表されたとする。ここで A はシリンダとピストンの断面積、 p_p はピストンの可動方向の運動量、 x_p はシリンダの底面からピストンまでの距離（したがって気体封入体積は $V = Ax_p$ ）である。古典系としての微視的状态は $(\mathbf{p}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{r}_N, p_p, x_p)$ で指定されるとして次の問いに答えよ。ボルツマン定数を k_B 、プランク定数を $h (= 2\pi\hbar)$ とする。必要ならば $N \gg 1$ として扱ってよい。

2-1. この系の分配関数 Z を求めよ。

2-2. この系のエネルギーの熱平均値 $\langle \mathcal{H} \rangle$ を求めよ。

2-3. 気体の体積の熱平均値 $\langle V \rangle = A\langle x_p \rangle$ 及び相対的な揺らぎの分散

$$\frac{\langle \Delta V^2 \rangle}{\langle V \rangle^2} = \frac{\langle V^2 \rangle - \langle V \rangle^2}{\langle V \rangle^2}$$

を求めよ。

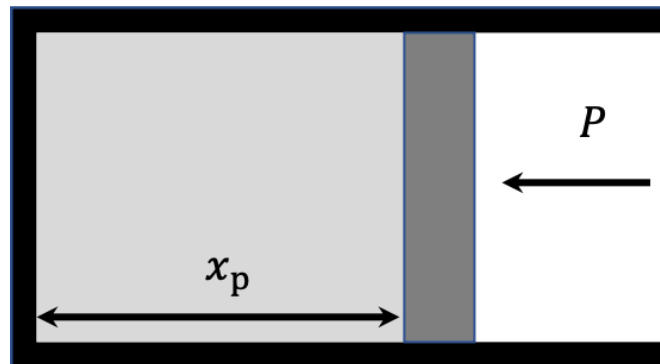


図 2