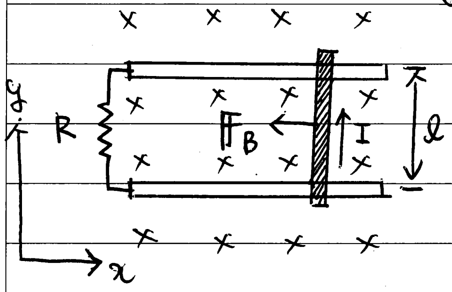
物理学II レポート問題 解答編 ⑥

問6−1



(A) 左図の様に電流が流れる導体棒が磁場から受ける力は $F_B = -I\ell B$ と書ける。

ここで 負の符号は左向きの力であることを示している。

水平方向にニュートンの第2法則を適用すると

$$F_x = ma = m\frac{dv}{dt} = -I\ell B$$

text P205 式(26.5)より $I = \dfrac{B\ell v}{R}$ であるから

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{R}v$$

vを左辺に
tを右辺に移項して整理すると

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt$$

初期条件 $v = v_i$ at $t = 0$ を用いて積分する

(まぎらわしいので初速を一旦v_iとおきました)

$$\int_{v_i}^{v_t}\frac{dv}{v} = -\underbrace{\frac{B^2\ell^2}{mR}}_{\text{時間に依らず一定}}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v_t}{v_i}\right) = -\frac{B^2\ell^2}{mR}t \qquad \therefore\ v(t) = v_i e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}$$

$\tau^{-1} = \dfrac{B^2\ell^2}{mR}$ とおき
$v_i \to v$ に戻すと

$$= v e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \cdots(1)$$

(B) 導体棒の持つ運動エネルギーはレールの電気伝導により抵抗に運ばれる。

次元をそろえるために、仕事率と電力で両者が保存することを調べる

$$-P_{bar} = P_{resister}$$

仕事率は運動エネルギーの時間変化 $\quad -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right) = I^2R$

text p205 式(26.5)より $I = \dfrac{B\ell v}{R}$ $\quad -mv\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{B^2\ell^2v^2}{R}$

式を整理すると

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt \quad \text{以下同様}$$

問6-1 (continued) (C) 上記式(1)より $v(t) = v_i e^{-t/\tau}$

紙媒体に誤記有り

$$\frac{dx}{dt} = v_i e^{-t/\tau}$$

$$x = \int_0^{\infty} v_i e^{-t/\tau} dt = -v_i \tau e^{-t/\tau} \Big|_0^{\infty}$$

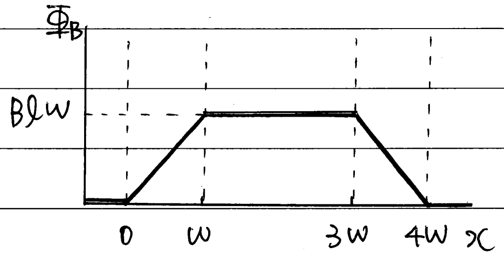
$$= -v_i \tau (0 - 1) = v_i \tau$$

$$= v_i \left(\frac{mR}{B^2 l^2} \right)$$

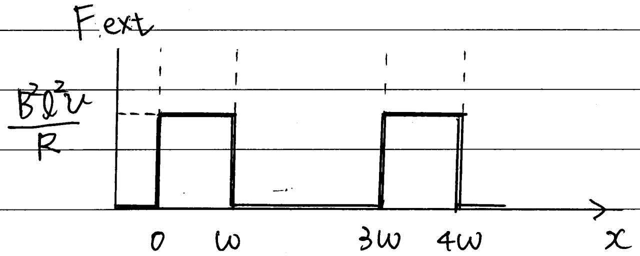
$$\boxed{x = v \left(\frac{mR}{B^2 l^2} \right)}$$

この式より $\begin{cases} x \propto R \\ x \propto B^{-2} \end{cases}$ よって 抵抗を2倍にすると距離は2倍になる
磁場を1/2倍にすると 〃 4倍になる.
磁場を1/2倍にした方が距離は大きくなる。

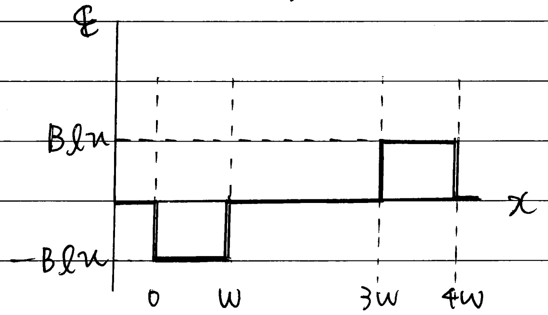
問6-2 (A)



(C)



(B) $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$



x軸方向の
※ xは金属の輪の右側として定義する。
(輪の中心で測った場合は $\frac{w}{2}$ だけずれます).

(C)の考え方.
- 輪が磁場の中に入る前は、磁場は何の影響も与えない.
- 輪が全て磁場中にある場合も、輪を貫く磁束は時間変化しないため、力は発生しない。
  ↳ 電流も流れない。

○ 速度を一定に保つ為に外力がする仕事率.

$$P = F_{ext} v = (IlB) v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R}$$

より $\boxed{F_{ext} = \frac{B^2 l^2 v}{R}}$

問6-3 (略) 講義で紹介しました → 詳しくは Slide#13 を参照

問6-4 (A) text p211 (26.64) より

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi[(2.81\times10^{-3}\,H)(900\times10^{-12}\,F)]^{1/2}}$$

$$\sim 1.00\times10^{6}\ [Hz]$$

(B) $Q_{max} = C\Delta V$

$$= (9.00\times10^{-12}\,F)(12.0\,V) = 1.08\times10^{-19}\ [C]$$

(C) $I_{max} = \omega Q_{max}$ ← 振幅

$$= 2\pi f\ Q_{max}$$
$$= (2\pi\times10^{6}\,s^{-1})(1.08\times10^{-10}\,c)$$
$$= 6.79\times10^{-4}\ [A] \qquad = 679\ [\mu A]$$

※ 問6-5 講義で配布した解答には計算ミスがありました。
問題設定の誤植 (正) 3.5 [μF] = 3.5×10^{-6} [F]
(誤) 3.5 [mF] = 3.5×10^{-3} [F]
と併わせて、次頁で2つの解答を示します。

i) C = 3.5 [mF] (ミリ) とした場合	ii) C = 3.5 [μF] (マイクロ) とした場合
(A) $\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0\,Hz) = 377\,[s^{-1}]$	(A) 同左
$X_L = \omega L = (377\,s^{-1})(1.25\,H)$	
$= 471\ [\Omega]$	
(B) $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{377\times(3.50\times10^{-3})}$	(B) $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{377\times(3.50\times10^{-6})}$
$= 0.758\ [\Omega]$	$= 758\ [\Omega]$
$= 758\ [m\Omega]$	μF

紙媒体での計算ミス!!(10^{-6} Factor 異なる)

問6-5 (continued)

i) $C = 3.5$ [mF] とした場合

(C) $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$= \sqrt{(425\,\Omega)^2 + (471 - 0.758\,\Omega)^2}$

~ 634 [Ω]

(D) $I_{max} = \dfrac{\Delta V_{max}}{Z} = \dfrac{150\,\mathrm{V}}{634\,\Omega}$

~ 0.237

$= 237$ [mA]

(E) $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{471 - 0.758}{425}\right)$

~ 47.89 [deg]

(F) $\Delta V_R = I_{max} R$

$= (237 \times 10^{-3})(425) = 116$ [V]

$\Delta V_L = I_{max} X_L$

$= (237 \times 10^{-3})(471) = 129$ [V]

$\Delta V_C = I_{max} X_C$

$= (237 \times 10^{-3})(0.758) \sim 0.207$

~ 207 [mV]

(G) $X_L = X_C + R\tan\phi$

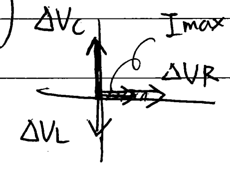
$\omega L = X_C + R\tan\phi$

$L = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{1}{\omega C} + R\tan\phi\right)$

$= \dfrac{1}{377}\left(\dfrac{1}{377 \times 3.5 \times 10^{-3}} + 425\tan(+30^\circ)\right)$

$= 0.653$ [H]

$X_C \ll X_L$



ii) $C = 3.5$ [μF] とした場合

$Z = \sqrt{(425)^2 + (471 - 758)^2}$

~ 513 [Ω]

$I_{max} = \dfrac{\Delta V_{max}}{Z} = \dfrac{150\,\mathrm{V}}{513\,\Omega} \sim 0.292$

$= 292$ [mA]

$\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{X_L - X_C}{R}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{471 - 758}{425}\right)$

~ -34.0 [deg]

(F) $\Delta V_R = (292 \times 10^{-3})(425) = 124$ [V]

$\Delta V_L = (〃)(471) = 138$ [V]

$\Delta V_C = (\quad)(758) = 221$ [V]

(G) $L = \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{1}{\omega C} + R\tan\phi\right)$

$= \dfrac{1}{377}\left(\dfrac{1}{377 \times 3.5 \times 10^{-6}} + 425\tan(-30^\circ)\right)$

s^{-1} s^{-1} F

$= \dfrac{1}{377}(757 - 245)$

~ 1.36 [H]

$X_C > X_L$ より負となる。(左図参照)