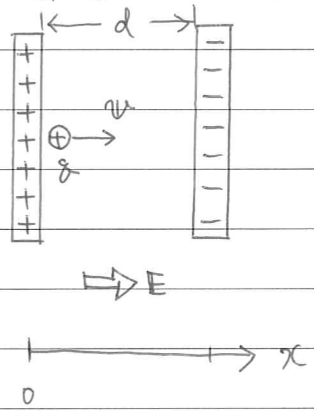
物理学II ⑦ Lecture Note

ex1 平行極板間に於ける正電荷の加速



電荷 q, 質量 m の粒子が電場中を等加速度運動する

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$
$$= 0 + 2a(d - 0)$$
$$= 2ad$$

∵ 初速 $v_i = 0$. 右方向を $+x$ とおく.

$$v_f = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \cdot \frac{qE}{m} \cdot d} = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

(別解) エネルギー保存則より $F\Delta x = \frac{1}{2} m v_f^2$

$$v_f = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}$$

∵ $F = qE$, $\Delta x = d$.

$$= \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$$

▶ Gauss's Law

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

「全電束 Φ_E は その内部の全電荷量を ε_0 で割ったものに等しい。」

任意の閉曲面を貫く

Gaussian Surface

div E

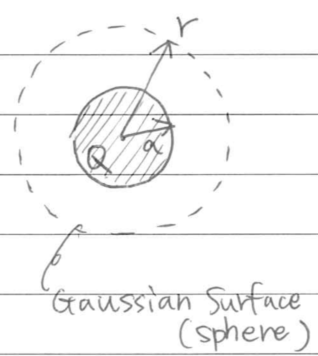
微分形 $\nabla \cdot E = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ ← 電荷密度

ナブラ $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x} i + \dfrac{\partial}{\partial y} j + \dfrac{\partial}{\partial z} k$.

「電場 Vector の発散は電荷密度に比例する」

ex2. 球対称の電荷分布. 外側

(a)



電荷分布が球対称なので, ガウシアン面上のあらゆる点で

E と dA が平行. よって $E \cdot dA = E\,dA$.

ガウスの法則より $\Phi_E = \oint E \cdot dA = \oint E\,dA = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

対称性より, |E| はガウシアン面上で一定値をとる

$$= E \oint dA = E(4\pi r^2)$$

for $r > a$ ∴ $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k_e \dfrac{Q}{r^2}$

→ つづく

ex2. 球対称の電荷分布 (continued)

(b)

$\boxed{\text{内側}}$ 半径 $r<a$ の (同心の) ガウシアン面 (球面) を考え、
内包される電荷からの寄与を考える

$$q_{IN} = \rho V' = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \cdots ①$$

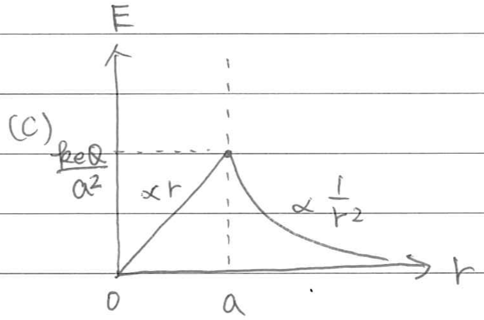
ガウスの法則より $\Phi_e = \oint E\,dA = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{IN}}{\varepsilon_0}$

$$E = \frac{q_{IN}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \cdots ②$$

①、②より $E = \dfrac{\frac{4\pi r^3}{3}\cdot\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r$

$$= k_e\frac{Q}{a^3}r \quad \because \begin{cases} \rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^2} \\ \varepsilon_0 = 1/k_e\cdot 4\pi \end{cases}$$

(c)



球の中心からの距離 r の関数で電場の大きさを表した図.

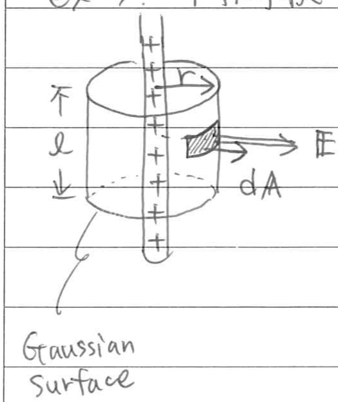
i) 球の外側から $r=a$ の点に近づくとき.

$$E = \lim_{r\to a} k_e\frac{Q}{r^2} = k_e\frac{Q}{a^2}$$

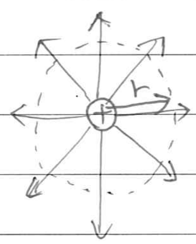
ii) 球の内側から $r=a$ の点に近づくとき

$$E = \lim_{r\to a} k\frac{Q}{a^3}r = k_e\frac{Q}{a^2}.$$

ex 3. 円筒状



上から見ると



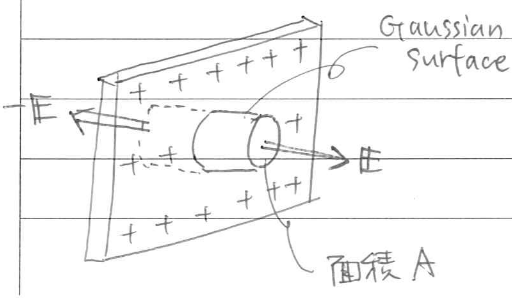
$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\oint dA = EA = \frac{q_{IN}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

λ: 線電荷密度
A: 側面面積 $A = 2\pi r l$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 2k_e\frac{\lambda}{r}$$

ex 4. 平面状

荷電平面に対し垂直な円筒をガウシアン面とする.
円筒の底面を通る電束 EA.



σ: 面電荷密度

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{IN}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$