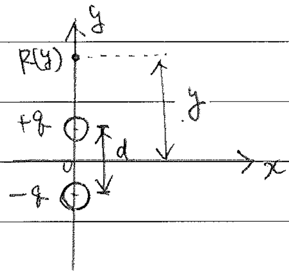
物理学II ⑥ Lecture Note

▶ 電気双極子（Electric Dipole）　[19-12]



i) y軸上に電荷を配置した場合

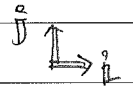
Rに於ける電場 $\mathbb{E}_{dip} = k_e\left\{\frac{q}{(y-d/2)^2} - \frac{q}{(y+d/2)^2}\right\}\cdot \mathbf{j}$

$= k_e \frac{2qyd}{(y-d/2)^2(y+d/2)^2}\cdot \mathbf{j}$

R>>d のとき

$(R-\frac{d}{2})^2 \approx R^2 - Rd + \cdots$

$\approx R^2$



$= k_e \frac{2qd}{R^3}\mathbf{j}$（方向は負電荷から正電荷の方向）

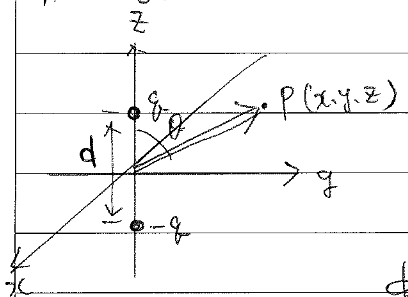
ii) Rに負電荷 −Q を置いた場合.

引力である

−Qが受ける力　$\mathbb{F} = -(-Q\cdot \mathbb{E}_{dip}(y))\ \mathbf{j}$

$= \frac{2Qqd}{R^3}\cdot \mathbf{j}$

▶ 電気双極子のPotential表記



静電位（静電Potential）　$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \mathbb{E}\cdot d\mathbf{s}$　（スカラー場）

$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2}$

$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$ より

$\phi(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)$　∵ $x^2+y^2+z^2 = r^2$

$\left(\phi = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{ij}}\right.$　（一般式）$\left.\right)$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{((z-d/2)^2+x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{-q}{((z+d/2)^2+x^2+y^2)^{1/2}}\right]$

小さい量 d のべき級数展開

$(z-\frac{d}{2})^2 \approx z - zd$ より

$(z-\frac{d}{2})^2 + x^2 + y^2 = r^2 - zd = r^2\left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$

i) $\frac{1}{((z-d/2)^2+x^2+y^2)^{1/2}} \approx r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}$

$\left[1-\frac{zd}{r^2}\right]^{-1/2}$ に対して二項展開の d の2乗以上を omit

$\sim \frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right)$ … (1)

ii) 同様に $\frac{1}{((z+d/2)^2+x^2+y^2)^{1/2}} \sim \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{zd}{r^2}\right)$ … (2)

→つづく

Continued (電気双極子のpotential表記)

(1)と(2)の差をとると $\phi(x,y,z) \sim \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{r^2}\,qd$

ポテンシャル，その積分としての「場」は $\overset{q}{(電荷)}\times\overset{d}{(距離)}$ に比例

$p \equiv qd$ (電気双極子モーメント)

z軸と角度θをなすとき $\dfrac{z}{r}=\cos\theta$ より

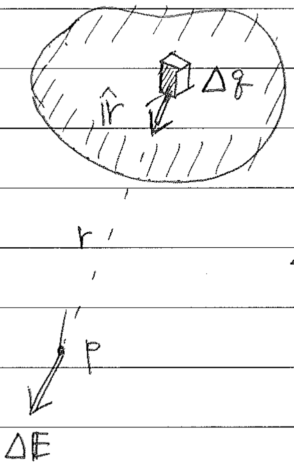
$$\phi(x,y,z) \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

r方向の単位vector $\hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{e}_r$.

(一般式) $$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}$$

▶ 連続的な電荷分布による電場 [20-1]

電荷の微小要素 Δq が点Pに作る電場



$$\Delta\mathbf{E} = k_e\frac{\Delta q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

r方向の単位vector $\hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{e}_r$

全電場 $$\mathbf{E} = k_e\underbrace{\sum_i}_{ベクトル和}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$ (i: i番目の体積要素)

離散
$\Delta q_i \to 0$ ↓
連続

$$\mathbf{E} = k_e\lim_{\Delta q_i\to 0}\sum_i\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i = k_e\underbrace{\int}_{ベクトル積分}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

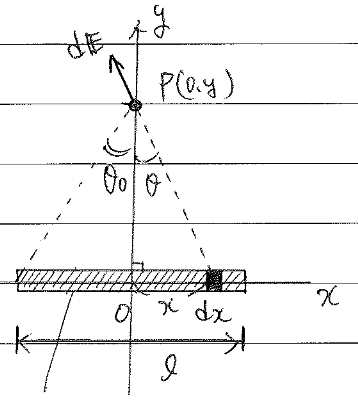
(微小)体積要素

▶ 体積電荷密度 $\rho \equiv \dfrac{Q}{V}$ [C/m³] V: volume　$dq = \rho\, dV$

▶ 面電荷密度 $\sigma \equiv \dfrac{Q}{A}$ [C/m²] A: area.　$dq = \sigma\, dS$

▶ 線電荷密度 $\lambda \equiv \dfrac{Q}{L}$ [C/m] L: length.　$dq = \lambda\, dL$

ex 1. 直線上の電荷分布による電場 [20-2]



点Pにおける微小要素 dx からの電場は　線電荷密度

$$dE = \frac{k_e\,dq}{x^2+y^2} \quad \cdots ① \qquad \text{ここで} \quad dq = \lambda\,dx \quad \cdots ②$$

対称性より $E_x = \int dE_x = 0$. (点Pは中点なので打ち消し合う)

$$E = E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta \quad \cdots ③$$

ここで $\cos\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ …④

全体で $+Q$ の電荷.

①-④より

$$E = 2k_e\lambda y\int_0^{l/2}\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{2k_e\lambda\sin\theta_0}{y}$$

∵ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\,\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

$\sin\theta_0 = \dfrac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=\frac{l}{2}} \left(= \dfrac{l^2}{l^2+4y^2}\right)$

$l\to\infty$ 無限長のとき $\theta_0 = 90^\circ$

よって $\boxed{E = \dfrac{2k_e\lambda}{y}}$

$x = y\tan\theta$ の関係より

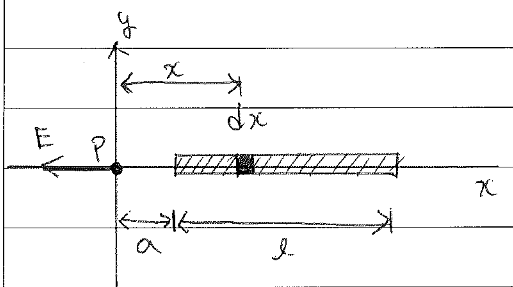
$$dx = y\sec^2\theta\cdot d\theta = \frac{y}{\cos^2\theta}\,d\theta.$$

覚えなくて宜しい

$$(x^2+y^2) = y^2(1+\tan^2\theta) = \frac{y^2}{\cos^2\theta}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int\frac{\cos^3\theta}{y^3}\cdot\frac{y}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{y^2}\int\cos\theta\cdot d\theta$$

ex 2. 同一直線上に置いたとき



点Pにおける dx からの電場

$$dE = k_e\frac{dq}{x^2} = k_e\frac{\lambda\,dx}{x^2} \qquad ∵\ dq = \lambda\,dx.$$

全電場

$$E = k_e\lambda\int_a^{l+a}\frac{dx}{x^2} = k_e\lambda\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{l+a} = k_e\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a}\right)$$

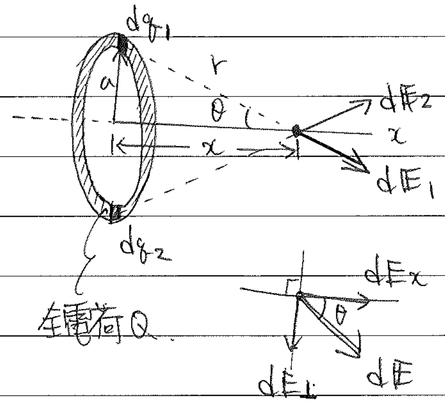
$$= k_e\frac{Q}{l}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a}\right)$$

$a \gg l$ のとき. $E = \dfrac{k_eQ}{a(l+a)} = \dfrac{k_eQ}{a^2}$ となり、点電荷modelと一致。

無視

DIVISION OF PHYSICS
HOKKAIDO UNIVERSITY
SAPPORO, JAPAN

ex3. リング状の一様な電荷分布による電場



対称性より、微小要素dq_1からの電場のx軸に垂直な成分は逆位相のdq_2の寄与により打ち消し合う。

$$E_\perp = 0.$$

よってx軸に平行な成分は

$$dE_x = k_e \frac{dq}{r^2}\cos\theta = k_e \frac{dq}{(a^2+x^2)}\cos\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$ より

$$dE_x = \frac{k_e x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, dq.$$

全電場 $$E_x = \int dE_x = \frac{k_e x}{(a^2+x^2)^{3/2}} \underbrace{\int dq}_{Q} = \boxed{\frac{k_e x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\, Q.}$$

考察①. $x \gg a$ のとき. $E_x = \frac{k_e Q}{x^2}$ となり点電荷と等しい。

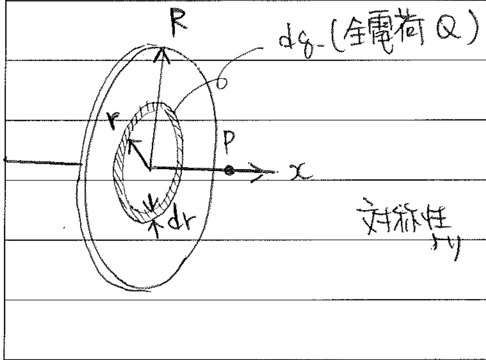
考察② $x = 0$ のとき $E_x = 0$.
Ringの中央に負電荷$-q$を置き、$x \ll a$ の範囲でx軸上にずらして手を離すと、どうなるか?

$P(x)$における電場は $E_x = \frac{k_e Q}{a^3}x$.

そこで負電荷$(-q)$に加わる力は $F_x = -\frac{k_e q Q}{a^3}x = -kx$ Hooke's law!!

負電荷は単振動(調和振動)する。

ex4. ディスク状の一様な電荷分布による電場



微小要素として同心円状の電荷分布を考える.

$$dq = \sigma \underbrace{dA}_{\text{リングの円周}} = \sigma\, 2\pi r\, dr$$

対称性より $$dE_x = \frac{k_e x}{(r^2+x^2)^{3/2}}\, 2\pi\sigma r \cdot dr$$ (ex3で $a \to r$, $Q \to dq$ とおく)

$$E_x = k_e x\pi\sigma \int_0^R \frac{2r\,dr}{(r^2+x^2)^{3/2}}$$

$r^2 = t$とおいて $2r\,dr = dt$ としてもよい

$$= k_e x\pi\sigma \int_0^R (r^2+x^2)^{-3/2}\, d(r^2)$$

$$= k_e x\pi\sigma \left[\frac{(r^2+x^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R = 2\pi k_e\sigma\left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

考察①「無限に広い平面」≒円盤に十分近い
$R \gg x$ のとき

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 2\pi k_e\sigma$ 平面からの距離に依らない。