

問題 IV

問1 ボーアの水素原子モデルに関して 以下の設問に答えよ。

1-1. 質量 m 、電荷 $-e$ の電子が陽子の周りを円運動している。ボーアの量子化条件を使って水素原子のエネルギー準位 E_n が

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0\hbar)^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と表されることを示せ。但し、 h をプランク定数として $\hbar = h/2\pi$ 、 ϵ_0 は真空の誘電率である。また、陽子は電子に比べ十分に重く、静止していると見なしてよい。

1-2. 次の設問の物理量の表式を書き、その数値を少なくとも有効数字 1 桁の精度で答えよ。但し、電子の質量 m は c を光速として $511 \text{ keV}/c^2$ で与えられ、 $\hbar c = 197 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ 、及び微細構造定数 $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137$ であることを用いてよい。

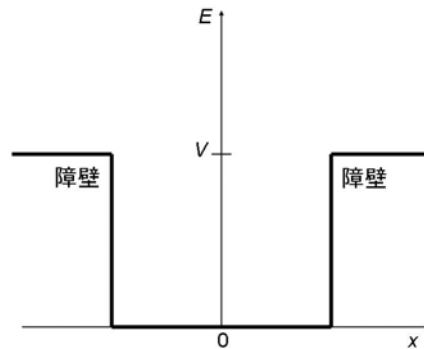
(a) 第 1 ボーア軌道の半径の大きさ

(b) 第 3 番目のエネルギー準位から第 2 番目の準位に電子が遷移するときに出される光の波長

(c) 第 1 ボーア軌道上にある電子の速さ

1-3. 古典物理学では、電子が 1-2(c) で求めた速さを持ち、1-2(a) で与えられる半径で円運動をすると、電子は輻射でエネルギーを失い陽子の位置に落ち込んでしまうと考えられる。そうはならず、水素原子が安定に存在するのはなぜか。その理由を、不確定性関係を用いて論ぜよ。

問2 下図のように、高さ V のポテンシャル障壁をもつ1次元井戸型ポテンシャルの中を、質量 m の1個の電子が運動している。ただし、このポテンシャル障壁は、その位置と高さを自由に変えることができるものとし、ポテンシャルの原点を $x=0$ での値にとる。



- 2-1. まず、障壁の位置が $x = \pm a/2$ にあり、障壁の間隔が a でその高さ V が無限大であるとして、電子のエネルギー固有状態を考える。
- 規格化された固有関数を求めよ。
 - エネルギー準位の表式を求めよ。
 - 障壁の間隔が 0.1nm のときの基底状態のエネルギーを求めよ。
但し、電子の質量 m は、 c を光速として $511 \text{ keV}/c^2$ で与えられ、 $\hbar c = 197\text{eV} \cdot \text{nm}$ であることを用いてよい。
- 2-2. 次に、瞬間的に障壁の位置を $x = \pm a$ まで対称的に移動し、障壁の間隔を $2a$ に拡大した。
- このときの電子の規格化された固有関数を求めよ。
 - 最初、2-1の系の基底状態にあった電子が、この広がった系の基底状態に見出される確率を求めよ。
- 2-3. 最後に、障壁の位置を $x = \pm a/2$ へ戻すと共に、障壁の高さを無限大から有限の大きさ $V = V_0$ まで下げた。
- このときの電子の基底状態の固有関数を求めよ。また、この固有関数を図示せよ。ただし、固有関数の規格化はしなくてもよい。
 - この基底状態のエネルギーは、2-1(b)で求めた基底状態のエネルギーと比べ大小どちら側にずれるか？ (ヒント：グラフを援用して解について議論せよ)