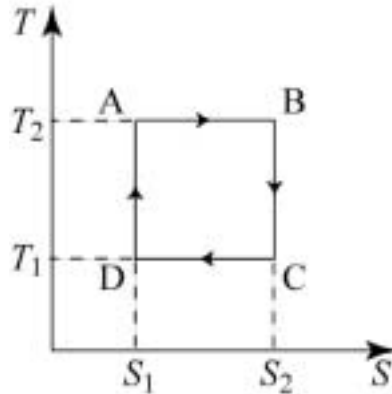


問題 IV

以下の問 1 ~ 3 に答えなさい。これらの問に現れる“温度”はすべて“絶対温度”である。

問 1 図のような循環過程を行う可逆な熱機関について考える。この図の縦軸と横軸は、それぞれ、作業物質の温度 T とエントロピー S である。この循環過程の中で、過程 AB と過程 CD では温度が一定であり、過程 BC と過程 DA ではエントロピーが一定である。



1-1. 過程 AB で熱機関は温度 T_2 の熱源から熱を吸収する。この熱量を Q_{AB} とする。 Q_{AB} を図中の温度とエントロピーを用いて表せ。また、このとき熱機関は外部に仕事をしする。この仕事量を W_{AB} として、過程 AB における作業物質の内部エネルギーの変化を記せ。

1-2. 熱機関が 1 サイクルの間に行う仕事 W を図中の温度とエントロピーを用いて表せ。

1-3. この熱機関の効率を求めよ。

問 2 温度 T で一様磁場 \vec{H} の中に置かれた大きさ $1/2$ の N 個のスピンについて考える。これらのスピン間の相互作用は無視できるものとする。磁場の向きに z 軸正の向きをとり、その単位ベクトルを \vec{e}_z で表す。各々のスピンの z 軸方向の磁気量子数が異なる 2 つの状態は、それぞれ、磁気モーメント $\mu\vec{e}_z$ と $-\mu\vec{e}_z$ ($\mu > 0$) をもつ。また、これらの状態のエネルギー準位は、磁場との相互作用により 2 つに分かれ、それぞれ、 $-\mu H$ と μH (H : 磁場の大きさ) で与えられる。ボルツマン定数を k_B とし、また、 $\beta = 1/k_B T$ として、以下の設問に答えよ。

2-1. 1 つのスピンが $-\mu H$ のエネルギー状態にある確率 p_1 と μH のエネルギー状態にある確率 p_2 は、それぞれ、ボルツマン因子 $e^{\beta\mu H}$ と $e^{-\beta\mu H}$ に比例し、状態和 Z_1 を用いて、

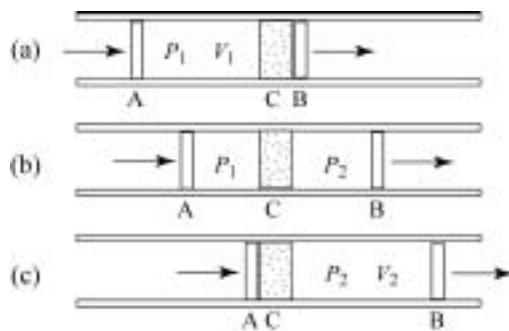
$$p_1 = \frac{e^{\beta\mu H}}{Z_1}, \quad p_2 = \frac{e^{-\beta\mu H}}{Z_1} \text{ と表される。} Z_1 \text{ を記せ。}$$

2-2. このスピン系の磁化 \vec{M} は、 i 番目 ($i=1, 2, 3, \dots, N$) のスピンの与える磁気

モーメントを $\vec{\mu}_i$ として、 $\vec{M} = \sum_{i=1}^N \langle \vec{\mu}_i \rangle$ で与えられる。ここで、 $\langle \vec{\mu}_i \rangle$ は $\vec{\mu}_i$ の熱統計平均である。磁化の大きさ M を T と H の関数として求めよ。

2-3. また、磁化率 χ は $\chi = \lim_{H \rightarrow 0} \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T$ で与えられる。 $\mu H \ll k_B T$ のとき、 χ が $\frac{1}{T}$ に比例することを示せ。ただし、 $x \ll 1$ のとき、 $e^x \cong 1+x$ と近似できる。

問3 図のように、ゆっくりと気体を通すことのできる細孔栓 C でシリンダーを左右に仕切る。はじめ細孔栓 C の左側 (AC 室) に 1 モルの気体があり (図 (a))、この気体をすべて細孔栓 C の右側 (BC 室) に押し出す (図 (c))。この過程の中で、AC 室と BC 室の圧力はそれぞれ P_1 と P_2 に保たれており、シリンダーと外界との熱の出入りはない。以下の設問に答えよ。



3-1. この過程で気体になされた仕事 W を求めよ。

3-2. エンタルピー H は $H=U+PV$ (U : 内部エネルギー、 P : 圧力、 V : 体積) と定義される。はじめ気体がすべて AC 室にあるときのエンタルピーを $H_1=U_1+P_1V_1$ 、BC 室にすべて押し出された後のエンタルピーを $H_2=U_2+P_2V_2$ とする。 H_1 は H_2 と等しいことを示せ。

3-3. 一般に、 $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = - \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P}$ の関係が成り立つことを示せ。

3-4. $P_1 > P_2$ のとき $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H > 0$ であれば、気体は細孔栓を通ることにより冷却される。この気体の状態方程式が、 T のある関数 $a(T)$ を用いて $PV=RT+a(T)P$ (R : 気体定数) と表されるとき、 $\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H > 0$ となるための $a(T)$ の条件について考察せよ。ただし、

$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = C_p$ (C_p : 定圧モル比熱)、 $\left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ となることを用いても良い。