平成 13 年度北海道大学大学院理学研究科
物理学専攻修士課程 (物理学分野) 入試問題

問題 T-I

質量 m の粒子が、$z=-\infty$ から$+z$方向に運動量 $p=\hbar k$をもって入射し、中心力ポテンシャル $V(r)$ によって散乱されて、無限遠方に去っていく問題を考える。
原点ををを中心とし、z軸を極軸とする極座標$\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$ を用いるとハミルトニアンは

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right\}+\frac{\hat{\boldsymbol{L}}^2}{2mr^2}+V(r),\hat{\boldsymbol{L}}^2=-\frac{\hbar^2}{\sin^2\theta}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\} \quad (1)$$

とかける。

次の問いに答えよ。

1. rが十分大きいところで、$V(r)$ が十分はやく $(frac1r$よりはやく$)$ 0 になるとする。このとき、この領域では波動関数$\psi(\boldsymbol{r})$ は、

$$\psi(\boldsymbol{r})\sim\psi_{\rm inc}(\boldsymbol{r})+\psi_{\rm scat}(\boldsymbol{r})\equiv e^{ikz}+\frac{1}{r}e^{ikr}f(\theta) \quad (2)$$

と分解することができる。第一項は入射波、第二項は散乱波を表す。対象性により、波動関数$\psi(\boldsymbol{r})$ は角度φ に依らない。

1-1 確率の流れの密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を、確率密度$\rho=|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ とともに連続の方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \quad (3)$$

が成り立つように決定せよ。

1-2 1-1 で求めた式を用いて入射波に伴う確率の流れの密度$\boldsymbol{j}_{\rm inc}$ と散乱された波に伴う$\boldsymbol{j}_{\rm scat}$ を計算せよ。ただし$\boldsymbol{j}_{\rm scat}$については $\mathcal{O}(r^{-2})$ まで求めよ。

1-3 微小立体角要素 $\mathrm{d}\Omega$の中に散乱される粒子の確率の流れを入射粒子の確率の流れの密度で割ったものを $\mathrm{d}\sigma$と書き、比 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$を微分断面積とよぶ。微分断面積 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$を $f(\theta)$ を使って表せ。
但し、∇ の極座標成分は $\nabla_r=\frac{\partial}{\partial r}$、$\nabla_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$、$\nabla_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ である。

2 波動関数を$\psi(\boldsymbol{r}) = R(r)Y(\theta,\varphi)$ とおいて変数分離する。$Y(\theta,\varphi)$ を$\hat{\boldsymbol{L}}^2$の固有関数で、固有値 $l(l+1)\hbar^2$(lは 0 または正整数) をもち、そのうちφ によらないものはルジャンドル多項式 $P_l(\cos\theta)$ で与えられる。したがってこの問題の波動関数$\psi(r,\theta)$ は

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r)P_l(\cos\theta) \tag{4}$$

と、展開できる。

一方、動径波動関数 $R_l(r)$ は次の方程式を満たす。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_l + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_l + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(r)\right)R_l = 0 \tag{5}$$

rが十分大きく $V(r)$ が無視できるところでは、(5) は球ベッセル方程式となるので係数 $R_l(r)$ は自由粒子の波動関数を使って

$$R_l(r) \sim A_l\{j_l(kr)\cos\delta_l - n_l(kr)\sin\delta_l\} \tag{6}$$

とかけるはずである。ここで、$j_l(x)$、$n_l(x)$ はそれぞれ球ベッセル関数、球ノイマン関数である。これらの関数については問題の終りの数学的補足を見なさい。また、A_l、δ_l は定数である。

2-1 式 (2) の $f(\theta)$ をルジャンドル多項式 $P_l(\cos\theta)$ を用いて

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(k)P_l(\cos\theta) \tag{7}$$

と展開し、これを部分波展開と呼ぶ。このとき、$f_l(k)$ が次式で表されることを、式 (13) を用いて示せ。

$$f_l(k) = \frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l \tag{8}$$

2-2 全断面積$\sigma_{\mathrm{tot}} = \int \mathrm{d}\,\Omega\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$ は単位時間当たり散乱される確率を表す。この全断面積と $f(\theta=0)$ の虚部$\Im f(0)$ には関係がある。1-3 と 2-1 の結果を使ってσ_{tot}と$\Im f(0)$ を計算し、次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{4\pi}{k}\Im f(0) \tag{9}$$

但し、ルジャンドル多項式は次の性質をもつ。

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x P_l(x)P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \text{ かつ } P_l(1) = 1 \tag{10}$$

2-3 式 (9) は物理的には確率の保存を表している。半径が十分の大きい球面上で確率の流れの密度$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ を積分することにより、σ_{tot}に対する式 (9) を導け。

3. 低エネルギーの入射粒子の散乱を考える。

3-1 $V(r)$ が短距離力のポテンシャルのとき、低エネルギーの散乱では、$l = 0$ の部分波から全断面積への寄与は $l \leq 1$ の波によるものに比べて非常に大きい。この理由を定性的に説明せよ。

3-2 ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (0 < r < a \text{ のとき}) \\ 0 (r > a \text{ のとき}) \end{cases}$$

のもとでの散乱で、$l = 0$ をもつ部分波による断面積を入射粒子のエネルギー $E \to 0$ の極限で求めよ。

数学的補足
球ベッセル関数 $j_l(x)$ および球ノイマン関数 $n_l(x)$ は微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y + \frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \left(1 - \frac{(l(l+1)}{x^2}\right)y = 0 \tag{11}$$

の互いに独立な解で $x \to 0$ の極限で $j_l(x)$ は有限、$n_l(x)$ は無限になるものである。
これらの関数は x のべき関数と三角関数を使って表され、x が大きいところでは

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x}\cos\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right),\ n_l(x) \sim \frac{1}{x}\sin\left(x - \frac{l*1}{2}\pi\right) \tag{12}$$

のようにふるまう。
また、次の展開公式が成り立つ。

$$e^{ix\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(x)P_l(\cos\theta) \tag{13}$$