熱物理学演習３

[1] 2次元のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \equiv (y^2+2, 2xy+1)$ について考える。ただし $\boldsymbol{r} \equiv (x,y)$。

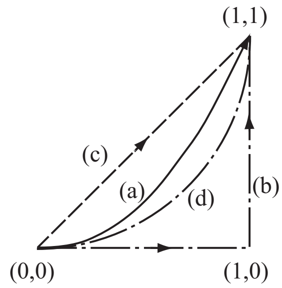
(1) 曲線 C を点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ に至る次のような曲線とする。それぞれの場合について，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算せよ。

(a) $\boldsymbol{r} = (t, t^2) \qquad (0 \le t \le 1)$

(b) $(0,0) \to (1,0) \to (1,1)$ なる折れ線

(c) $(0,0) \to (1,1)$ なる直線

(d) 円周 $\boldsymbol{r} = (\cos\theta, 1+\sin\theta) \qquad (-\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0)$



(2) $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ を確かめよ。

(3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad} f(\boldsymbol{r})$ となるスカラー場 (ポテンシャル) f を求めよ。

(4) $-[f(1,1) - f(0,0)]$ を計算し，(1) の結果と一致することを確かめよ。

[2] 領域 $-\pi/2 \le x, y \le \pi/2$ で定義された二変数関数 $f(x,y) = \cos x \cos y$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x,y)$ の値が 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 となる等高線を描け。概形でよい。

(2) 関数 $f(x,y)$ の点 (x,y) における「勾配 (gradient)」は，

$$\mathrm{grad} f(x,y) \equiv \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$$

で計算できる。点 $(0,0)$, $(\pi/4,0)$, $(0,\pi/4)$, $(\pi/2,0)$, $(0,\pi/2)$ における勾配を求め，(1) で描いた等高線上にそれらのベクトルを描け。

[3] 以下の問いに答えよ。

(1) 合成関数の微分 $\dfrac{d}{dx}f(x)g(x)$ を $f(x)$ の微分と $g(x)$ の微分を用いて表せ。

(2) 積の微小量 $d(TS)$ を dT と dS を用いて表せ。