統計力学II演習問題

2008年12月16日

[1] 粒子数 N が変化する場合の熱力学第一法則は

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}'Q - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N \tag{1}$$

で与えられる。ここで E は内部エネルギー、$\mathrm{d}'Q$ は系に加えた微小熱量、p は圧力、V は体積、また μ は化学ポテンシャルである。一方、熱力学第二法則は、(i) 熱平衡状態の空間で「エントロピー」という状態量 S があること、および、(ii) 系の微小変化に対して

$$\mathrm{d}'Q \le T\mathrm{d}S \tag{2}$$

が成立することを主張する。ここで T は温度であり、等号は可逆過程において成立する。

(a) 可逆過程における内部エネルギーの微小変化 $\mathrm{d}E$ を $\mathrm{d}S$ を用いて表せ。

(b) Legendre 変換 $\Omega = E - TS - \mu N$ を導入する。微小変化 $\mathrm{d}\Omega$ の表式を書き下せ。

(c) 前問より熱力学ポテンシャル Ω が (T, V, μ) の関数であることがわかり、その中で示量変数は V のみである。従って、系の相加性より、$\Omega(T, xV, \mu) = x\Omega(T, V, \mu)$ が成立する。このことから Ω が圧力 p と体積 V を用いて $\Omega = -pV$ と表せることを示せ。

理想気体に対する Ω の統計力学的表式は、状態密度 $D(\varepsilon)$ を用いて

$$\Omega = \pm k_{\mathrm{B}}T \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) \ln[1 \mp \mathrm{e}^{-(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}]\mathrm{d}\varepsilon, \qquad \begin{cases} \text{上符号：} & \text{ボーズ粒子} \\ \text{下符号：} & \text{フェルミ粒子} \end{cases}, \tag{3}$$

と表せる。また系の粒子数 N とエネルギー E は、それぞれ

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) \frac{1}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} \mp 1}\mathrm{d}\varepsilon, \qquad E = \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{\mathrm{e}^{(\varepsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T} \mp 1}\mathrm{d}\varepsilon, \tag{4}$$

で与えられる。状態密度が

$$D(\varepsilon) = A\varepsilon^{\alpha-1}\theta(\varepsilon), \qquad A > 0,\ \alpha > 0, \qquad \theta(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & : \varepsilon > 0 \\ 0 & : \varepsilon < 0 \end{cases}, \tag{5}$$

で与えられる場合について、以下の問いに答えよ。

(d) $pV = \dfrac{1}{\alpha}E$ が成立することを示せ。

(e) この系の高温における圧力 p の表式を、量子補正の最低次まで考慮して、T と N の関数として求めよ。特に古典極限の状態方程式が $pV = Nk_{\mathrm{B}}T$ と表せることを示せ。

(f) 低温のフェルミ粒子系について、圧力 p の表式を T^2 のオーダーまで求めよ。