

統計力学 II 演習問題

2008 年 11 月 18 日

[1] 次の Hamiltonian で記述される 2 粒子系を考える。

$$\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2, \quad \hat{h}_j \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_j^2 + U(\mathbf{r}_j).$$

- (a) \hat{P}_{12} を座標 1 と座標 2 の置換演算子とする。 \hat{P}_{12} と \hat{H} が可換であることを示せ。
- (b) \hat{P}_{12} の固有値を σ とする。 σ の可能な値をすべてあげよ。
- (c) 粒子のスピンと固有値 σ との関係、および Fermi 粒子・Bose 粒子の区別について、簡潔に説明せよ。
- (d) フェルミ粒子系における Pauli 原理について簡潔に説明せよ。
- (e) スピン s が $\frac{1}{2}$ の基底関数は、 z 軸を量子化軸にとるとき、 $|\uparrow\rangle \equiv |s_z = \frac{1}{2}\rangle$ および $|\downarrow\rangle \equiv |s_z = -\frac{1}{2}\rangle$ で与えられる。また、スピン s が $\frac{1}{2}$ の粒子が 2 個あるときの全スピン演算子は、 $\hat{s} \equiv \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ である。 \hat{s}^2 と \hat{s}_z のすべての同時固有状態を $|\alpha\rangle_1 |\alpha'\rangle_2$ から構成せよ ($\alpha, \alpha' = \uparrow, \downarrow$)。
- (f) \hat{h} の二つの軌道固有関数を $\varphi_n(\mathbf{r})$ および $\varphi_{n'}(\mathbf{r})$ ($n \neq n'$) とする。この二つの軌道固有関数と (e) のスピン固有関数から、正しい置換対称性を持つ \hat{H} の固有関数を構成せよ。
- (g) (f) の問題で $n = n'$ の場合について、この軌道固有関数と (e) のスピン固有関数から、正しい置換対称性を持つ \hat{H} の固有関数を構成せよ。