統計力学II演習問題

2008年11月04日

[1] 状態ベクトル

$$|x_1 x_2 \cdots x_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle\,, \tag{1}$$

と、

$$\hat{P}\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \sigma^P \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) \tag{2}$$

を満たす波動関数 $\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ を用いて、状態ベクトル $|\Psi\rangle$ を次式で定義する。

$$|\Psi\rangle \equiv \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N |x_1 x_2 \cdots x_N\rangle \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N). \tag{3}$$

この状態ベクトルが次式を満たすことを示せ。

$$\hat{\psi}(x_1)|\Psi\rangle = N \int \mathrm{d}x_2' \cdots \int \mathrm{d}x_N' |x_1 x_2' \cdots x_N'\rangle \Psi(x_1, x_2', \cdots, x_N'), \tag{4a}$$

$$\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)|\Psi\rangle = N(N-1) \int \mathrm{d}x_3' \cdots \int \mathrm{d}x_N' |x_1 x_2 x_3' \cdots x_N'\rangle \Psi(x_1, x_2, x_3', \cdots, x_N'). \tag{4b}$$

[2] 同種多粒子系の1粒子演算子 $\hat{H}^{(1)}$ と2粒子演算子 $\hat{H}^{(2)}$ は、一般に次の形を持つ。

$$\hat{H}^{(1)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \hat{h}_j^{(1)}, \qquad \hat{H}^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \hat{h}_{ij}^{(2)}.$$

これらの演算子の $\Psi_{\nu'}^*(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ と $\Psi_\nu(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の間の行列要素は、(3) 式の状態ベクトルを用いて以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}x_1 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi_{\nu'}^*(x_1, \cdots, x_N)\hat{H}^{(1)}\Psi_\nu(x_1, \cdots, x_N) \\ &= \int \mathrm{d}x_1 \langle \Psi_{\nu'}|\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{h}_1^{(1)}\hat{\psi}(x_1)|\Psi_\nu\rangle, \end{aligned} \tag{5a}$$

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}x_1 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi_{\nu'}^*(x_1, \cdots, x_N)\hat{H}^{(2)}\Psi_\nu(x_1, \cdots, x_N) \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \langle \Psi_{\nu'}|\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\hat{h}_{12}^{(2)}\hat{\psi}(x_2)\hat{\psi}(x_1)|\Psi_\nu\rangle. \end{aligned} \tag{5b}$$

(5) 式を証明せよ。