# 統計力学演習問題解答 (9)

## [1]

(a) 分配関数 $Z$ は

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{\nu} \mathrm{e}^{-\beta E_\nu} \\
&= \sum_{\{m_{jz}\}} \mathrm{e}^{\beta \sum_{k=1}^{N} m_{kz} B} \\
&= \left( \sum_{m=-\mu,\mu} \mathrm{e}^{\beta m B} \right)^N \\
&= 2^N \cosh^N \left( \frac{\mu B}{kT} \right)
\end{aligned}
$$

と計算できる．したがって

$$
F = -kT \ln Z = -NkT \ln \left[ \, 2 \cosh \left( \frac{\mu B}{kT} \right) \, \right]
$$

$$
S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk \ln \left[ \, 2 \cosh \left( \frac{\mu B}{kT} \right) \, \right] - Nk \left( \frac{\mu B}{kT} \right) \tanh \left( \frac{\mu B}{kT} \right)
$$

となる．高温極限 $\mu B/kT \longrightarrow 0$ では，$S \longrightarrow Nk \ln 2$ となる．また，熱容量 $C$ は

$$
C = T \frac{\partial S}{\partial T} = Nk \left( \frac{\mu B}{kT} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{\mu B}{kT} \right)}
$$

と計算できる．

(b) (a) で求めた分配関数を用いて

$$
M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z = N\mu \tanh \left( \frac{\mu B}{kT} \right)
$$

$$
\chi = \frac{\partial M}{\partial B} = \frac{N\mu^2}{kT} \frac{1}{\cosh^2 \left( \frac{\mu B}{kT} \right)}
$$

と計算できる．$\mu B/kT \longrightarrow 0$ の極限で，$\cosh \left( \frac{\mu B}{kT} \right) \longrightarrow 1$ なので

$$
\chi \longrightarrow \frac{N\mu^2}{kT} \propto \frac{1}{T}
$$

である．

(c)

$$
\begin{aligned}
\overline{(M - \bar{M})^2} &= \overline{M^2} - \overline{M}^2 \\
&= \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial B^2} - \left( \frac{1}{Z} \frac{1}{\beta} \frac{\partial Z}{\partial B} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B} \ln Z \right) \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{\partial M}{\partial B} = kT\chi
\end{aligned}
$$

**[2]**

**[A]**

(a)

$$
\begin{aligned}
Z &= \prod_{j=1}^{3N} \int \frac{dx_j dp_j}{2\pi\hbar} \mathrm{e}^{-\beta \sum_{k=1}^{3N} \left( \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_k^2 \right)} \\
&= \left[ \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \int dp \mathrm{e}^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right)} \right]^{3N} \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} \left( \frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2} \left( \frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{3N/2} = \left( \frac{kT}{\hbar\omega} \right)^{3N}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
F &= -kT \ln Z = -3NkT \ln \left( \frac{kT}{\hbar\omega} \right) \\
S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = 3Nk \left[ \ln \left( \frac{kT}{\hbar\omega} \right) + 1 \right] \\
U &= TS + F = 3NkT
\end{aligned}
$$

と計算できる．

(b) (a) の結果から

$$
C = \frac{\partial U}{\partial T} = 3Nk
$$

**[B]**

(c) 分配関数 $Z$ は

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{\nu} \mathrm{e}^{-\beta E_\nu} \\
&= \sum_{\{n_i\}} \mathrm{e}^{-\beta \sum_{j=1}^{3N} \hbar\omega \left( n_j + \frac{1}{2} \right)} \\
&= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)} \right]^{3N} \\
&= \left( \frac{\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega}} \right)^{3N} \\
&= \frac{1}{2^{3N} \sinh^{3N}(\beta\hbar\omega/2)}
\end{aligned}
$$

となる．したがって，内部エネルギー $U$ と熱容量 $C$ は

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z = -3N \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \left[ \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right] \\
&= \frac{3}{2} N\hbar\omega \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2kT} \right) \\
C &= \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{4} Nk \left( \frac{\hbar\omega}{kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2(\hbar\omega/2kT)}
\end{aligned}
$$

と計算できる．

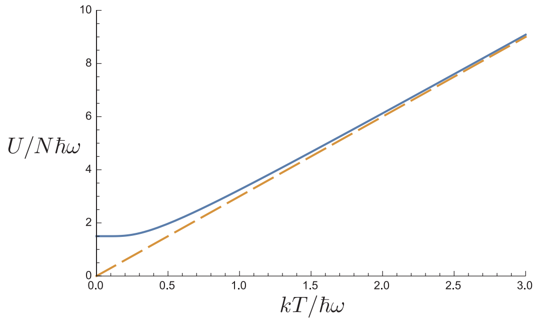


図 1: $U$ の温度依存性

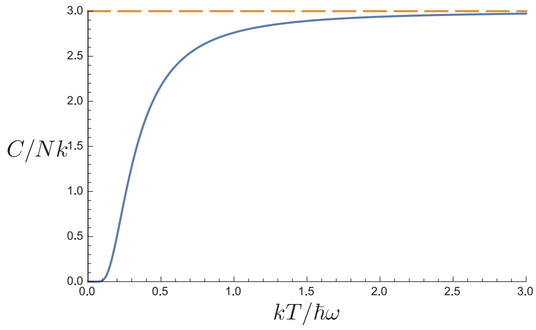


図 2: $C$ の温度依存性

実線は量子力学的結果，破線は古典力学的結果を表す。

(d) (c) の結果から，$\hbar\omega/kT \longrightarrow 0$ の高温極限をとると，$U \longrightarrow 3NkT$ かつ $C \longrightarrow 3Nk$ となり，古典極限と一致する。