統計力学演習問題 (9)

[1] 3 次元正方格子の格子点に自由な磁気モーメント $\boldsymbol{m}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ があり、z 方向に大きさ B の磁束密度がかかっている。この系のハミルトニアンは、磁気モーメントの z 成分 m_{jz} を用いて

$$H = -\sum_{j=1}^{N} m_{jz} B. \tag{1}$$

で与えられる。各 m_{jz} は $+\mu$ と $-\mu$ の二つの値のみを取るものとする。

(a) B が一定の場合の系の自由エネルギー F、エントロピー S、熱容量 C の表式を温度 T の関数として求めよ。また、S の高温極限での値を書き下せ。

(b) 磁化 M および 磁化率 χ を求めよ。特に、$\mu_B B / k_{\rm B} T \to 0$ でのふるまいを調べ、キュリーの法則 $\chi \propto \frac{1}{T}$ が成立することを確かめよ。

(c) 磁化のゆらぎが $\overline{(M - \bar{M})^2} = k_{\rm B} T \chi$ で与えられることを示せ。

[2] 固体比熱のモデルとして、格子点上にある N 個の独立な 3 次元調和振動子ハミルトニアン

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right)$$

で記述されるを考え (アインシュタイン・モデル)，温度 T の熱浴と接触しているものとする。

[A] まず古典的に考える。

(a) 分配関数 Z を求め、ヘルムホルツの自由エネルギー F、エントロピー S、内部エネルギー U を計算せよ。

(b) 熱容量が $C = 3Nk_B$（デュロン-プティの法則）で与えられることを示せ。

[B] 量子力学を使うと、各（1 次元）振動子のエネルギー準位は $\epsilon_i = \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2})$ $(n_i = 0, 1, \cdots)$ と離散的になることが知られている。

(c) 内部エネルギー U および熱容量 C を計算し、T の関数として C のグラフを書け。

(d) どのような条件のとき古典的な結果が再現されるか。