統計力学演習問題解答 (7)

[1]

(a) 規格化条件から

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathcal{C} \prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \mathrm{e}^{-\beta H} \\
&= \mathcal{C} \prod_{k=1, k\neq j}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \int_{-\infty}^{\infty} x_j \mathrm{e}^{-\beta H} \\
&= \mathcal{C} \prod_{k=1, k\neq j}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \times \left(\left[x_j \mathrm{e}^{-\beta H} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \left(-\beta \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) x_j \mathrm{e}^{-\beta H} \right) \\
&= \mathcal{C}\beta \prod_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_k x_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \mathrm{e}^{-\beta H} = \beta \left\langle x_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\left\langle x_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle = \frac{1}{\beta} = kT
$$

(b) Hamiltonian は $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2$ であるので，(a) の結果から

$$
\langle K \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} p \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle = \frac{1}{2} kT
$$

$$
\langle V \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \kappa x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} x \frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle = \frac{1}{2} kT
$$

[2]

(a) この系の Hamilotinan は

$$
H = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} + mgz_j \right)
$$

で与えられるので，分配関数 Z は

$$
\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{N!} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{d^3 r_j d^3 p_j}{(2\pi\hbar)^3} \mathrm{e}^{-\beta H} \\
&= \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} A^N \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3N/2} \left(\int_0^L dz \mathrm{e}^{-\beta mgz} \right)^N \\
&= \frac{(AL)^N}{N!} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3N/2} \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT}}{mgL/kT} \right)^N
\end{aligned}
$$

ここで，Stiring の公式を用いて

$$
\ln Z \approx N \left(\ln \frac{AL}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} + 1 + \ln \frac{1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT}}{mgL/kT} \right)
$$

となる．以上から

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \frac{5}{2} NkT - NkT \frac{mgL}{kT} \frac{\mathrm{e}^{-mgL/kT}}{1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT}}$$

$$C_V = \frac{dE}{dT} = \frac{5}{2} Nk - Nk \left(\frac{mgL}{kT} \right)^2 \frac{\mathrm{e}^{-mgL/kT}}{(1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT})^2}$$

(b) 高さ z での粒子数密度 $n(z) = \sum_{j=1}^{N} \delta(z - z_j)/A$ の平均は，

$$\begin{aligned}
\bar{n}(z) &= \frac{1}{Z} \frac{1}{N!} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{d^3 r_j d^3 p_j}{(2\pi\hbar)^3} n(z) \mathrm{e}^{-\beta H} \\
&= \frac{N}{AL} \frac{mgL}{kT} \frac{\mathrm{e}^{-mgz/kT}}{1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT}}
\end{aligned}$$

と与えられる. また，高さ z の位置において高さの幅 dz の微小区間 (体積 Adz) では理想気体の状態方程式が成立しているので

$$p(z)(Adz) = \bar{n}(z)(Adz)kT \longrightarrow p(z) = \bar{n}(z)kT = \frac{NkT}{AL} \frac{mgL}{kT} \frac{\mathrm{e}^{-mgz/kT}}{1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT}}$$

と計算できる．

(c) $mgL/kT \to 0$ のとき $\mathrm{e}^{-mgL/kT} \approx 1 - mgL/kT$，また，$mgL/kT \to \infty$ のとき $1 - \mathrm{e}^{-mgL/kT} \approx 1$ とし，微小量の最低次までの近似を施すと

$$C_V \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} Nk & (mgL/kT \longrightarrow 0) \\ \dfrac{5}{2} Nk & (mgL/kT \longrightarrow \infty) \end{cases}$$

$$p(z) \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{NkT}{AL} & (mgL/kT \longrightarrow 0) \\ \dfrac{NkT}{AL} \dfrac{mgL}{kT} \mathrm{e}^{-mgz/kT} & (mgL/kT \longrightarrow \infty) \end{cases}$$

[3]

(a) この系の Hamiltonian は $H = \sum_{j=1}^{N} cp_j$ であるので，分配関数 Z は

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{N!} \prod_{j=1}^{N} \int \frac{d^3 r_j d^3 p_j}{(2\pi\hbar)^3} \mathrm{e}^{-\beta H} \\
&= \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 \mathrm{e}^{-\beta cp} dp \right]^N \\
&= \frac{1}{N!} \left[\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{(\beta c)^3} \Gamma(3) \right]^N \\
&= \frac{1}{N!} \left[\frac{V}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \right]^N
\end{aligned}$$

となる．

(b) (a) の結果から

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{1}{\beta}\ln Z \\
&= -NkT\left\{\ln\frac{V}{N} - \ln\left[\pi^2\left(\frac{\hbar c}{kT}\right)^3\right] + 1\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \\
&= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\ln\frac{V}{N} - \ln\left[\pi^2\left(\frac{\hbar c}{kT}\right)^3\right] + 1\right\} \\
&= \frac{3N}{\beta} = 3NkT
\end{aligned}
$$

$$
C_V = \frac{dU}{dT} = 3Nk
$$

と計算できる.