

統計力学演習問題 (5)

- [1] 質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体が、体積 V の容器に入っており、温度 T の外界と熱的に接触している場合を考える。系の古典的ハミルトニアンは、 \mathbf{p}_j を粒子 j ($= 1, 2, \dots, N$) の運動量として、次式で与えられる。

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m}. \quad (1)$$

- (a) この系が熱平衡状態にある場合の分配関数 Z を求めよ。
- (b) 自由エネルギー F を求めよ。
- (c) エントロピー S と圧力 p の表式を求めよ。
- (d) 準静的断熱過程ではエントロピーが変化しない。(c)の結果を用いて、準静的断熱過程において「 $pV^\gamma = \text{一定}$ 」 ($\gamma = 5/3$) が成立することを示せ。
- [2] $x^2 + y^2 = 1$ で表される単位円上において、関数 $f(x, y) \equiv x + y$ に最大値を与える点を求めよ。
(ヒント：Lanrange の未定乗数法を使うと便利)
- [3] 格子点上に $N (\gg 1)$ 個の原子があり、各原子はエネルギー 0 の基底状態とエネルギー ϵ の励起状態の 2 つの固有状態のみを持っている。原子間の相互作用は弱く無視でき、系全体として孤立系をなしている。
- (a) N 原子のうち n 原子が励起状態にある場合の系の全エネルギー E とその状態数 $W(n)$ を求めよ。ただし、 $1 \ll n \ll N - n$ が成り立つものとする。
- (b) 系の温度 T を定めよ。ただし、 $N \gg 1$ のとき、 $\ln N! \approx N(\ln N - 1)$ が良い精度で成立する。
- (c) 系のエネルギー E および熱容量 C を T の関数として求め、そのグラフを描け。