# 統計力学演習問題 (3)

[1] 質量 $m$ を持つ $N$ 個の単原子分子からなる理想気体がある。この気体が絶対温度 $T$ (K) の熱平衡状態にあるとき、その運動量分布は Maxwell 分布

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mkT}\right]$$

に従う。ここに $k = 1.38\times10^{-23}$J/K はボルツマン定数である。この熱平衡理想気体について以下の問いに答えよ。

(a) 全エネルギー $E = N\dfrac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}$ の期待値 $U \equiv \langle E\rangle$ を求めよ。

(b) 定積比熱 $C = \dfrac{\partial U}{\partial T}$ の表式を求めよ。

[2] Gauss 積分

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx$$

の値を求めるために、その二乗

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \tag{1}$$

を考える。

(a) $x$ と $y$ を $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標表示する。ここで $r$ と $\theta$ はそれぞれ $0 \le r \le \infty$ および $0 \le \theta \le 2\pi$ の範囲を動く。$x^2+y^2$ および体積素片 $dxdy$ を極座標表示せよ。

(b) 極座標表示で (1) 式の積分を実行し、$I = \sqrt{\pi}$ であることを示せ。

[3] ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は次式で定義される。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} dt \tag{2}$$

(a) $N$ を正の整数として、$\Gamma(N+1) = N!$ を示せ。

(b) $\Gamma(N+1)$ を以下のように表す。

$$\Gamma(N+1) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{f(t)} dt. \qquad f(t) \equiv -t + N\ln t \tag{3}$$

指数関数の肩に現れる関数 $f(t)$ を最大にする $t$ の値 $t_0$ を求めよ。

(c) $N \gg 1$ の時の $f(t)$ を

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2$$

と近似し、また (3) 式の積分の下限 0 を $-\infty$ で置き換えることにより、$\Gamma(N+1)$ が

$$\Gamma(N+1) \approx (2\pi N)^{1/2}(N/e)^N \tag{4}$$

と Stirling の公式で近似できることを示せ。

(d) $N = 5, 10, 20$ の場合について、(4) 式の値を $\Gamma(N+1) = N!$ と比較し，相対誤差も求めよ。

注：ここで用いた近似法は「漸近展開」と呼ばれる。