

統計力学演習問題 (14)

[1] 相互作用のない同種粒子系のグランドカノニカル分布を考える。その大分配関数は、

$$Z_G \equiv \sum_{\nu} e^{-\beta(E_{\nu} - \mu N_{\nu})}$$

で定義される。ここで ν は多粒子状態を指定する固有量子数、 E_{ν} と N_{ν} はその固有エネルギーと固有粒子数、 μ は化学ポテンシャルである。この Z_G が、一粒子固有エネルギー ε_k を用いて、次のように表せることを示せ。

$$Z_G = \prod_k \left[1 \mp e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)} \right]^{\mp 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} - : \text{ボーズ粒子} \\ + : \text{フェルミ粒子} \end{array} \right. \quad (1)$$

[2] 相互作用のない同種粒子系のグランドカノニカル分布を考える。この系のエネルギー期待値 $U \equiv \langle E \rangle$ と粒子数期待値 $\langle N \rangle$ が、以下のように表せることを示せ。

$$U = \sum_k \varepsilon_k \bar{n}_k, \quad \langle N \rangle = \sum_k \bar{n}_k. \quad (2)$$

ただし、 \bar{n}_k は、

$$\bar{n}_k \equiv \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \mp 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} - : \text{ボーズ粒子} \\ + : \text{フェルミ粒子} \end{array} \right. \quad (3)$$

で表され、一粒子状態 k を占有する粒子数期待値を意味する。