§9 摂動論

• 摂動論の概要

(a) $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$：全ハミルトニアン

(b) $\hat{H}_0\varphi_m(\mathbf{r}) = \varepsilon_m\varphi_m(\mathbf{r})$：固有値と固有ベクトルが解っている。

$$\langle\varphi_{m'}|\varphi_m\rangle \equiv \int\varphi_m^*(\mathbf{r})\varphi_{m'}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{mm'} \text{ : 規格直交系} \tag{1}$$

$$\sum_m \varphi_m(\mathbf{r})\varphi_m^*(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \text{ : 完全系} \tag{2}$$

(c) $\hat{V}$ は $\hat{H}_0$ に対する小さい補正と考えることができる。

$$\Downarrow$$

$\hat{H}$ を $\hat{H}_0$ のまわりで $\hat{V}$ について展開し、固有値と固有ベクトルを近似的に求める。

• 行列形式

$\hat{V}$ が時間に依存しない場合、この問題は、量子力学の行列形式で次のように書くことができる。

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \qquad \text{: } \hat{H} \text{に対する固有値問題} \tag{3}$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{m'}\varphi_{m'}(\mathbf{r})c_{m'} \qquad \text{: 完全系での展開} \tag{4}$$

(4) 式を (3) 式に代入して、$\hat{H}_0\varphi_{m'}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{m'}\varphi_{m'}(\mathbf{r})$ を用いる。

$$\sum_{m'}\varepsilon_{m'}\varphi_{m'}(\mathbf{r})c_{m'} + \sum_{m'}\hat{V}\varphi_{m'}(\mathbf{r})c_{m'} = E\sum_{m'}\varphi_{m'}(\mathbf{r})c_{m'} \tag{5}$$

左から $\varphi_m^*(\mathbf{r})$ をかけて $\mathbf{r}$ について積分し、規格直交性 (1) を用いると、次式が得られる。

$$\varepsilon_m c_m + \sum_{m'}V_{mm'}^{(1)}c_{m'} = Ec_m \qquad V_{mm'}^{(1)} = \int\varphi_m^*(\mathbf{r})\hat{V}\varphi_{m'}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \tag{6}$$

すなわち、行列 $(\varepsilon_m\delta_{mm'} + V_{mm'}^{(1)})$ の固有値問題。

(6) 式は、次のようにも書ける。

$$(E - \varepsilon_m)c_m = \sum_{m'}V_{mm'}^{(1)}c_{m'} \tag{7}$$

9.1 時間に拠らない摂動論 — I. 縮退のない場合

- **条件**

  (a) $\hat{V}$：時間依存せず; $\hat{H}_0$ に較べて一次の微小量

  (b) ε_m に縮退なし

- **摂動展開**

  (7) 式で、n 番目の固有値 E_n を求めることを考え、この固有値と固有ベクトル c_m を、以下のように $\hat{V}^{(1)}$ の次数について形式的に展開

$$E_n = \varepsilon_n + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \cdots \tag{8}$$

$$c_m = c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + \cdots \tag{9}$$

  (8) 式と (9) 式を (7) 式に代入し、次数の等しい項を集める。

  0 次

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_m) c_m^{(0)} = 0 \tag{10}$$

  1 次

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_m) c_m^{(1)} + E_n^{(1)} c_m^{(0)} = \sum_{m'} V_{mm'}^{(1)} c_{m'}^{(0)} \tag{11}$$

  2 次

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_m) c_m^{(2)} + E_n^{(1)} c_m^{(1)} + E_n^{(2)} c_m^{(0)} = \sum_{m'} V_{mm'}^{(1)} c_{m'}^{(1)} \tag{12}$$

- **0 次の解：**

  (10) 式より、$c_m^{(0)} \propto \delta_{mn}$ が解る。
  以下、この比例係数を 1 と置く (←0 次の波動関数の規格化)

$$c_m^{(0)} = \delta_{mn} \tag{13}$$

  固有関数

$$\psi_n^{(0)}(\mathbf{r}) = \sum_m \varphi_m(\mathbf{r}) c_m^{(0)} = \varphi_n(\mathbf{r}) \tag{14}$$

- **1 次の解：**

  (13) 式を (11) 式に代入。

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_m) c_m^{(1)} + E_n^{(1)} \delta_{mn} = V_{mn}^{(1)} \tag{15}$$

  $m = n$ の場合。

$$E_n^{(1)} = V_{nn}^{(1)} \tag{16}$$

  $m \neq n$ の場合。

$$c_m^{(1)} = \frac{V_{mn}^{(1)}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \tag{17}$$

固有関数

$$\psi_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_m c_m^{(1)} \varphi_m(\mathbf{r}) = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}^{(1)}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \varphi_m(\mathbf{r}) + c_n^{(1)} \varphi_n(\mathbf{r}) \tag{18}$$

補）未定の係数 $\mathbf{c_n^{(1)}}$ について

(a) 一次近似の範囲での波動関数 $\longleftarrow$ (14) 式と (18) 式より

$$\psi_n(\mathbf{r}) \approx \psi_n^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi_n^{(1)}(\mathbf{r}) = \varphi_n(\mathbf{r}) + \psi_n^{(1)}(\mathbf{r}) \tag{19}$$

(b) 波動関数の規格化を要請 — (1) 式と (18) 式を用いて

$$1 = \langle \psi_n | \psi_n \rangle \approx \langle \varphi_n | \varphi_n \rangle + \langle \varphi_n | \psi_n^{(1)} \rangle + \langle \psi_n^{(1)} | \varphi_n \rangle = 1 + c_n^{(1)} + c_n^{(1)*}$$

すなわち $c_n^{(1)} + c_n^{(1)*} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad c_n^{(1)} = i\chi_n$：純虚数
(χ_n は実数で一次のオーダーの微小量)

(c) 波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ の位相を取り替え

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n(\mathbf{r}) &\equiv \psi_n(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-i\chi_n} \approx (1 - i\chi_n)\psi_n^{(0)}(\mathbf{r}) + \psi_n^{(1)}(\mathbf{r}) \\ &= \psi_n^{(0)}(\mathbf{r}) + \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}^{(1)}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \varphi_m(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\Downarrow$$

$\mathbf{c_n^{(1)}}$ を位相の取り替えにより消すことができた！$\longrightarrow$ 最初からゼロと置いて OK

- **2 次の解：**

(13)、(16)、(17) 式を、(12) 式に代入。

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_m) c_m^{(2)} + E_n^{(1)} c_m^{(1)} + E_n^{(2)} \delta_{mn} = \sum_{m'(\neq n)} V_{mm'}^{(1)} \frac{V_{m'n}^{(1)}}{\varepsilon_n - \varepsilon_{m'}} + V_{mn}^{(1)} c_n^{(1)} \tag{21}$$

(21) 式で $m = n$ と置き、$E_n^{(1)} = V_{nn}^{(1)}$ と $V_{m'n}^{(1)} = V_{nm'}^{(1)*}$ を考慮すると、次式が得られる。

$$E_n^{(2)} = \sum_{m'(\neq n)} \frac{|V_{nm'}^{(1)}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{m'}} \tag{22}$$

(21) 式で $m \neq n$ の場合

$$c_m^{(2)} = \sum_{m'(\neq n)} \frac{V_{mm'}^{(1)} V_{m'n}^{(1)}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)(\varepsilon_n - \varepsilon_{m'})} - \frac{V_{mn}^{(1)} V_{nn}^{(1)}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2} + \frac{V_{mn}^{(1)} c_n^{(1)}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \tag{23}$$

右辺最後の項は 0 と置いて構わない ($c_n^{(1)} \to 0$)

- **2 次摂動 — 何を行ったのか？**

(a) 2×2 Hermite 行列の固有値問題

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_0 & V_{01} \\ V_{01}^* & \varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \qquad (\varepsilon_0 < \varepsilon_1) \tag{24}$$

(b) 固有値

$$0 = (\varepsilon_0 - E)(\varepsilon_1 - E) - |V_{01}|^2 = E^2 - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)E + \varepsilon_0\varepsilon_1 - |V_{01}|^2$$

従って、E は次のように求まる。

$$\begin{aligned} E &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0 \mp [(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 + 4|V_{01}|^2]^{1/2}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \mp \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\left[1 + 4\frac{|V_{01}|^2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2}\right]^{1/2} \\ &\approx \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_0) \mp \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_0 + \frac{2|V_{01}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \cdots\right) \\ &= \begin{cases} \varepsilon_0 + \dfrac{|V_{01}|^2}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \\ \varepsilon_1 + \dfrac{|V_{01}|^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

$|V_{01}|^2/(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2$ についての展開 $\longrightarrow$ エネルギーの 2 次摂動公式

$$\textbf{摂動展開が良い近似} \longleftrightarrow \frac{|\boldsymbol{V_{nm}}|^2}{(\boldsymbol{\varepsilon_n - \varepsilon_m})^2} \ll \mathbf{1}\textbf{が必要} \tag{26}$$

9.2 時間に拠らない摂動論 — II. 縮退のある場合

- **条件**

(a) $\hat{V}$：時間依存せず; $\hat{H}_0$ に較べて一次の微小量

(b) 固有値 ε_n が d 重に縮退 — 対応する固有関数：$\varphi_{n1}(\mathbf{r}), \cdots, \varphi_{nd}(\mathbf{r})$

9.1 の摂動論は使えず — (26) 式が成立せず； $\hat{V}$ により、縮退が解ける可能性

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n + V^{(1)}_{n1;n1} & V^{(1)}_{n1;n2} & \cdots & V^{(1)}_{n1;nd} \\ V^{(1)}_{n2;n1} & \varepsilon_n + V^{(1)}_{n2;n2} & \cdots & V^{(1)}_{n2;nd} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V^{(1)}_{nd;n1} & V^{(1)}_{nd;n2} & \cdots & \varepsilon_n + V^{(1)}_{nd;nd} \end{bmatrix}$$

- 0 **次摂動**

  第 **0** 近似の波動関数
$$\psi^{(0)}_{n\alpha}(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{d} \varphi_{na}(\mathbf{r}) c^{(0)}_{na;n\alpha} \tag{27}$$
  行列形式 — (7) 式で $m = na$, $m' = nb$, $E = \varepsilon_n + E^{(1)}_{n\alpha}$ と置いて
$$\sum_b V^{(1)}_{na;nb} c^{(0)}_{nb;n\alpha} = E^{(1)}_{n\alpha} c^{(0)}_{na;n\alpha} \tag{28}$$
  この固有値問題を解いて、固有値 $E^{(1)}_{n\alpha}$ と固有ベクトル $c^{(0)}_{na;n\alpha}$ を求める。

- **高次の補正**

  ε_n に属する基底関数を $\{\varphi_{na}(\mathbf{r})\}_{a=1}^{d}$ から $\{\psi^{(0)}_{n\alpha}(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^{d}$ に取り替えて摂動展開を行う。

9.3 相互作用表示

- **時間に依存した Schrödinger 方程式** — $\mathbf{r}$ 依存性を省略
$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_0 + \hat{V}(t)\right] \psi(t)\,, \qquad \hat{V}(t)\text{：摂動とみなせる.} \tag{29}$$

- **相互作用表示** — $\boldsymbol{\psi(t) = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar)\phi(t)}$

- **相互作用表示の Schrödinger 方程式**

  $\psi(t) = \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\phi(t)$ を (29) 式に代入
$$\hat{H}_0 \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\phi(t) + \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_0 + \hat{V}(t)\right] \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\phi(t)$$
  ($\hat{H}_0$ は演算子＝行列であることに注意—異なる演算子は一般に非可換)

  共通因子 $\hat{H}_0 \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\phi(t)$ を落とした後、左から $\mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t/\hbar}$ を作用させる。
$$\mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\, i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{V}(t)\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\phi(t)$$
$$\text{すなわち、}\qquad i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\hat{V}(t)\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\phi(t)$$

  まとめ
$$i\hbar \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\phi(t)\,, \tag{30}$$
$$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t) \equiv \mathrm{e}^{i\hat{H}_0 t/\hbar}\, \hat{V}(t)\, \mathrm{e}^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}\,. \tag{31}$$

- **$\phi(t)$ に対する積分方程式**

(30) 式を t_0 から t まで積分

$$i\hbar\left[\phi(t)-\phi(t_0)\right]=\int_{t_0}^{t}\hat{V}_{\mathrm{I}}(t')\phi(t')dt'$$

$t<t_0$ で $\hat{V}(t)=0$ かつ $\phi(t)=\varphi_n$ (ただし φ_n は $\hat{H}_0$ の固有関数) であったとすると

$$\phi(t)=\varphi_n-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{V}_{\mathrm{I}}(t')\phi(t')dt' \qquad \text{：}\phi(t)\text{ に対する積分方程式} \tag{32}$$

- **$\phi(t)$ に対する摂動展開の式**

(32) 式の右辺の $\phi(t)$ に左辺の表式を繰り返し代入

$$\begin{aligned}\phi(t)&=\varphi_n-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_1)\left[\varphi_n-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}dt_2\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_2)\phi(t_2)\right]\\&=\varphi_n-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_1)\varphi_n+\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_2)\varphi_n+\cdots\\&=\varphi_n+\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{\ell}\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{\ell-1}}dt_\ell\,\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_1)\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_2)\cdots\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_\ell)\varphi_n\,.\end{aligned} \tag{33}$$

9.4 時間に依存した摂動論 — 一次摂動

- **一次摂動による波動関数の変化**

$$\phi(\mathbf{r},t)=\varphi_n(\mathbf{r})-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\hat{V}_{\mathrm{I}}(t_1)\,\varphi_n(\mathbf{r})\,,\qquad \hat{V}_{\mathrm{I}}(t_1)\equiv\mathrm{e}^{i\hat{H}_0t_1/\hbar}\hat{V}(t_1)\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0t_1/\hbar}\,. \tag{34}$$

$\phi(t)$ を $\hat{H}_0$ の固有関数で展開 — $t<t_0$ では φ_n 状態であったことを考慮

$$\phi(\mathbf{r},t)=\varphi_n(\mathbf{r})+\sum_{m'}c_{m'}^{(1)}(t)\varphi_{m'}(\mathbf{r})\,. \tag{35}$$

(35) 式を (34) に代入し、左から $\varphi_m^*(\mathbf{r})$ をかけて $\mathbf{r}$ 積分を実行

$$\sum_{m'}\langle\varphi_m|\varphi_{m'}\rangle c_{m'}^{(1)}(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\langle\varphi_m|\mathrm{e}^{i\hat{H}_0t_1/\hbar}\hat{V}(t_1)\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0t_1/\hbar}|\varphi_n\rangle$$

ここで、$\langle\varphi_m|\varphi_{m'}\rangle=\delta_{mm'}$, $\langle\varphi_m|\mathrm{e}^{i\hat{H}_0t_1/\hbar}=\mathrm{e}^{i\varepsilon_mt_1/\hbar}\langle\varphi_m|$, $\mathrm{e}^{-i\hat{H}_0t_1/\hbar}|\varphi_n\rangle=|\varphi_n\rangle\mathrm{e}^{-i\varepsilon_nt_1/\hbar}$ を考慮すると、以下のようになる。

$$c_m^{(1)}(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{i(\varepsilon_m-\varepsilon_n)t_1/\hbar}\langle\varphi_m|\hat{V}(t_1)|\varphi_n\rangle\,dt_1\,.$$

まとめ

$$c_m^{(1)}(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{i\omega_{mn}t_1}\,V_{mn}^{(1)}(t_1)\,dt_1\,, \tag{36}$$

$$\omega_{mn}\equiv\frac{\varepsilon_m-\varepsilon_n}{\hbar}\,,\qquad V_{mn}^{(1)}(t_1)\equiv\langle\varphi_m|\hat{V}(t_1)|\varphi_n\rangle\,. \tag{37}$$

- **周期的摂動**

摂動の演算子 (Hermite 演算子)

$$\hat{V}(t) = \hat{F}\mathrm{e}^{-i\omega t} + \hat{F}^{\dagger}\mathrm{e}^{i\omega t}\,. \tag{38}$$

考えている状況の例 — 弱い X 線を物質に当てて、光電効果を観測する。
(a) 物質には弱い X 線が定常的に照射されている。
(b) 物質の応答も定常的（電子が定常的に飛び出して来ている)。

(36) 式と (37) 式に (38) 式を代入し、$t_0 = 0$ とおいて積分を実行。

$$\begin{aligned}
c_m^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{e}^{i(\omega_{mn}-\omega)t_1}\,dt_1\,\langle\varphi_m|F|\varphi_n\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{e}^{i(\omega_{mn}+\omega)t_1}\,dt_1\,\langle\varphi_m|F^{\dagger}|\varphi_n\rangle \\
&= -\frac{i}{\hbar}\left.\frac{\mathrm{e}^{i(\omega_{mn}-\omega)t_1}}{i(\omega_{mn}-\omega)}\right|_0^t F_{mn}^{(1)} - \frac{i}{\hbar}\left.\frac{\mathrm{e}^{i(\omega_{mn}+\omega)t_1}}{i(\omega_{mn}+\omega)}\right|_0^t F_{nm}^{(1)*} \\
&= \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega_{mn}-\omega)t}}{\hbar(\omega_{mn}-\omega)}F_{mn}^{(1)} + \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega_{mn}+\omega)t}}{\hbar(\omega_{mn}+\omega)}F_{nm}^{(1)*}
\end{aligned}$$

まとめ

$$c_m^{(1)} = \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega_{mn}-\omega)t}}{\hbar(\omega_{mn}-\omega)}F_{mn}^{(1)} + \frac{1-\mathrm{e}^{i(\omega_{mn}+\omega)t}}{\hbar(\omega_{mn}+\omega)}F_{nm}^{(1)*} \tag{39}$$

$$F_{mn}^{(1)} = \langle\varphi_m|F|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|F^{\dagger}|\varphi_m\rangle^{*} \tag{40}$$

$\hbar\omega \approx \pm(\varepsilon_m - \varepsilon_n)$ を満たす角振動数 ω に対して大きな応答

9.5 周期的摂動による離散状態 ε_n から連続状態 ε_m への遷移

$\hbar\omega = \varepsilon_m - \varepsilon_n$ を満たす m が連続的に分布 $\longrightarrow$ (39) の第二項は第一項に比べて無視できる

例：金属 Al の $2p$ 軌道からの光電子 ($n = 2p$) — ε_m は連続スペクトルの平面波 ($m = \mathbf{k}$)

状態 n から $m(\neq n)$ への遷移確率 $P(n \to m) = |c_m^{(1)}|^2$

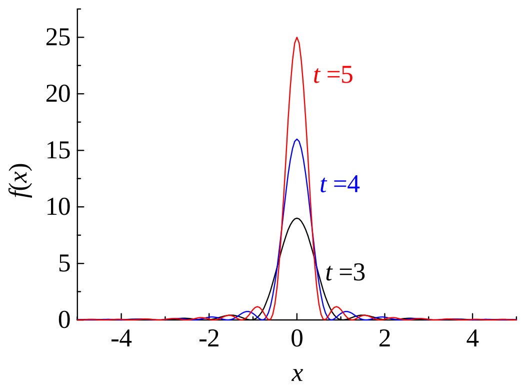
$$P(n \to m) = |F_{mn}|^2\frac{2[1-\cos(\omega_{mn}-\omega)t]}{\hbar^2(\omega_{mn}-\omega)^2} = \frac{|F_{mn}|^2}{\hbar^2}\left[\frac{\sin\dfrac{(\omega_{mn}-\omega)}{2}t}{\dfrac{\omega_{mn}-\omega}{2}}\right]^2 \tag{41}$$

ここで、$f(x) \equiv \left(\dfrac{\sin xt}{x}\right)^2$ は次のような性質を持つ。

$$f(x \to 0) = t^2 \tag{42}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin xt}{x}\right)^2 dx = t\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = t\pi \tag{43}$$

ゆえに、$f(x) \equiv \left(\dfrac{\sin xt}{x}\right)^2 \xrightarrow{t\to\infty} \pi t\delta(x).$



この性質を用いると、定常状態での遷移確率は次のようになる。

$$P(n \to m) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{|F_{mn}|^2}{\hbar^2}\pi t\delta\left(\frac{\omega_{mn}-\omega}{2}\right) = t|F_{mn}|^2\frac{2\pi}{\hbar}\delta(\varepsilon_m - \varepsilon_n - \hbar\omega) \qquad (44)$$

- **単位時間当たりの遷移確率 $\boldsymbol{w_{mn}}$** （単位時間当たりに飛び出してくる光電子の数）

$$w_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar}|F_{mn}|^2\delta(\varepsilon_m - \varepsilon_n - \hbar\omega) \qquad \text{：Fermi の黄金律} \qquad (45)$$