

§8 磁場中の荷電粒子

8.1 電磁場中の古典自由粒子

- Lagrangean — 粒子の電荷 $e (> 0)$

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - e\phi, \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt & : \text{速度} \\ \phi = \phi(\mathbf{r}, t) & : \text{スカラー・ポテンシャル} \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) & : \text{ベクトル・ポテンシャル} \end{cases} \quad (1)$$

- 電磁場

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2)$$

- 共役運動量

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longleftrightarrow \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \left[\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (3)$$

- Hamiltonian — Lagrangian からの Legendre 変換 (独立変数の取り換え: $\dot{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{p}$)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L = \mathbf{p} \cdot \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + e\phi \\ &= \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi \end{aligned} \quad (4)$$

- 運動方程式 (Lagrange 形式)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial r_i} \quad (i = x, y, z) \quad (5)$$

ここで、左辺と右辺は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left[m\dot{r}_i + \frac{e}{c} A_i(\mathbf{r}, t) \right] = m\ddot{r}_i + \frac{e}{c} \left[\sum_j \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} \dot{r}_j + \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial L}{\partial r_i} &= \frac{e}{c} \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial r_i} \dot{r}_j - e \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} \end{aligned}$$

ゆえに、運動方程式は、次のようになる。

$$m\ddot{r}_i = e \left[-\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + \frac{e}{c} \sum_j \dot{r}_j \left[\frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} \right]$$

$i = x$ のとき、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= e \left[-\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + \frac{e}{c} \left[y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] \\ &= eE_x + \frac{e}{c} (v_y B_z - v_z B_y) \end{aligned}$$

まとめ

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6)$$

- 静磁場中の運動 — z 方向の一様磁場 $\mathbf{B} \parallel z$

$$m\dot{v}_x = \frac{e}{c}v_y B \quad (7)$$

$$m\dot{v}_y = -\frac{e}{c}v_x B \quad (8)$$

$$m\dot{v}_z = 0 \quad (9)$$

(7) 式を t で微分した式に (8) 式を代入

$$\ddot{v}_x = \frac{eB}{mc}\dot{v}_y = \frac{eB}{mc}\left(-\frac{eB}{mc}v_x\right) = -\omega_c^2 v_x \quad (10)$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \quad : \text{サイクロトロン振動数}$$

(10) 式は調和振動子の方程式 $\rightarrow v_x = v_0 \sin(\omega_c t + \theta)$ (A : 振幅、 θ : 初期位相)
この結果を (7) に代入 $\rightarrow v_y = \dot{v}_x/\omega_c = v_0 \cos(\omega_c t + \theta)$

まとめ

$$\mathbf{v} = (v_0 \sin(\omega_c t + \theta), v_0 \cos(\omega_c t + \theta)) \quad : \text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega_c} \text{ の円運動} \quad (11)$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc} \quad : \text{サイクロトロン振動数}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \left(-\frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \theta), \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \theta)\right) \quad : \text{円運動の半径 } \frac{v_0}{\omega_c} \text{ は連続値}$$

古典粒子の運動は電磁場 \mathbf{E} , \mathbf{B} のみで決まる — ϕ , \mathbf{A} は補助場で実体がない

8.2 外場中の自由粒子の量子力学

- 量子力学への移行

(a) 軌道部分

古典粒子の運動量 $\mathbf{p} \rightarrow$ 運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$

$$\hat{H}_{\text{orb}} = \frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 + e\phi \quad \left(\hat{\Pi} \equiv \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \quad (12)$$

(b) スピン部分 — 古典力学に対応物なし

$$\hat{H}_Z = -2\mu_B \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{B} \quad (13)$$

- スピンの効果を Schrödinger 方程式に取り込む — 行列形式を用いて

(a) スピン演算子 $\hat{\mathbf{s}} \rightarrow$ スピン行列 $\underline{\mathbf{s}}$ (演算子形式 \rightarrow 行列形式)

(b) 波動関数 $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow$ 2成分 (スピノール) 波動関数 $\psi(\mathbf{r}) \equiv \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{r}) \\ \psi_2(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$

(c) 軌道部分の Hamiltonian にスピン空間の単位行列 $\underline{1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を掛ける。

- 対応する Schrödinger 方程式 (Pauli, 1927)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t), \quad \hat{H} \equiv \left(\frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 + e\phi \right) \underline{1} - 2\mu_B \underline{s} \cdot \mathbf{B} \quad (14)$$

成分表示 — ψ_1 と ψ_2 に対する連立微分方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 + e\phi \right) \psi_1(\mathbf{r}, t) - \mu_B [(B_x - iB_y)\psi_2(\mathbf{r}, t) + B_z\psi_1(\mathbf{r}, t)], \quad (15)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_2(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 + e\phi \right) \psi_2(\mathbf{r}, t) - \mu_B [(B_x + iB_y)\psi_1(\mathbf{r}, t) - B_z\psi_2(\mathbf{r}, t)], \quad (16)$$

cf. Dirac 方程式は 4 成分 $\psi_1(\mathbf{r}, t), \dots, \psi_4(\mathbf{r}, t)$ に対する連立微分方程式 ← Lorentz 変換に対する不変性の要請

- 確率密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ とスピン密度 $\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) = |\psi_1(\mathbf{r}, t)|^2 + |\psi_2(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (17)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) = \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \underline{s} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (18)$$

- ゲージ変換 (定義式)

$$\text{定義式: } \begin{cases} \psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left[i\frac{e}{\hbar c}\lambda(\mathbf{r}, t)\right] \psi'(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) + \nabla\lambda(\mathbf{r}, t) \\ \phi(\mathbf{r}, t) = \phi'(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial\lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (19)$$

- ゲージ不変性 — 方程式 (14) は変換 (19) に対してその形を変えない

証明

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}\psi &= \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\lambda\right) \psi' = \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\lambda\right) \left[-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}(\mathbf{A} - \nabla\lambda)\right] \psi' \\ &= \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\lambda\right) \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}'\right) \psi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right) \psi &= \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right) \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\lambda\right) \psi' = \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\lambda\right) \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\left(\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)\right] \psi' \\ &= \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\lambda\right) \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi'\right) \psi' \end{aligned}$$

ゆえに、 $(\psi', \mathbf{A}', \phi')$ に対する方程式は、 (ψ, \mathbf{A}, ϕ) に対する方程式 (14) と同じ形を持つ

↓

(\mathbf{A}, ϕ) にはゲージ変換の自由度から来る不定性

8.3 一様な磁場中の自由荷電粒子

- 一様静磁場中の Schrödinger 方程式

静磁場： $\phi = 0$

$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\varphi(\mathbf{r})$ と置いて (14) 式に代入

$$\hat{H}\varphi(\mathbf{r}) = E\varphi(\mathbf{r}) \quad (20)$$

磁場方向を z 軸に選ぶ。対応するベクトル・ポテンシャルは次のように選べる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(x, y), A_y(x, y), 0) \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (0, 0, B) \quad (22)$$

(A_x, A_y) の選択例 — ゲージの選び方

$$\left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx \right) : \text{対称ゲージ}, \quad (0, Bx) : \text{Landau ゲージ}, \quad \dots$$

- スピンの Zeeman エネルギーと固有関数

$$\hat{H}_Z = -2\mu_B \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = -2\mu_B \begin{bmatrix} \frac{B}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{B}{2} \end{bmatrix} = -\mu_B B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad : \text{対角的} \quad (23)$$

\hat{H}_Z の固有関数

$$\varphi_{\uparrow}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_Z \varphi_{\uparrow}(\mathbf{r}) = -\mu_B B \varphi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \quad (24)$$

$$\varphi_{\downarrow}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_Z \varphi_{\downarrow}(\mathbf{r}) = +\mu_B B \varphi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \quad (25)$$

軌道部分 $\varphi(\mathbf{r})$ に対する方程式 ← $\varphi_{\sigma}(\mathbf{r})$ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) のスピン部分は \perp の固有ベクトル

$$\frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 \varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon \varphi(\mathbf{r}) \quad (26)$$

全固有エネルギー： $E_{\nu\sigma} = \varepsilon_{\nu} - \sigma\mu_B B$ ν : 軌道部分の量子数； $\sigma = \begin{cases} +1 & : \uparrow \\ -1 & : \downarrow \end{cases}$

- 軌道部分に対する Schrödinger 方程式 — z 方向の運動の分離

$$\hat{H}_{\text{orb}} = \frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 = \frac{1}{2m} (\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 + \hat{p}_z^2) \quad (27)$$

z 方向については一様 $\rightarrow \varphi(\mathbf{r}) = \varphi'(x, y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_z z}$ と置く

$\varphi'(x, y)$ に対する方程式

$$\hat{H}'_{\text{orb}} \varphi'(x, y) = \varepsilon' \varphi'(x, y) \quad (28)$$

ここで

$$\hat{H}'_{\text{orb}} \equiv \frac{1}{2m} (\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2), \quad \varepsilon = \varepsilon' + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (29)$$

以下、 xy 面内の軌道運動のみを考え、 $\hat{H}'_{\text{orb}} \rightarrow \hat{H}_{\text{orb}}$, $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$, $\varphi'(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$ と略記する。

- \hat{H}_{orb} の書き換え — 生成消滅演算子を用いて

$\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y$ の交換関係

$$[\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = i\hbar \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = i \frac{e\hbar B}{c} \quad (30)$$

“因数” 分解

$$\hat{\Pi}_x^2 + \hat{\Pi}_y^2 = (i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y)(-i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y) - i(\hat{\Pi}_x \hat{\Pi}_y - \hat{\Pi}_y \hat{\Pi}_x) = (i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y)(-i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y) + \frac{e\hbar B}{c} \quad (31)$$

\uparrow $\hat{\Pi}_x$ と $\hat{\Pi}_y$ が演算子であることによるおつり (正の数となるよう分解する)

生成消滅演算子 a^\dagger, a の導入

$$a^\dagger \equiv \alpha(i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y), \quad a \equiv \alpha(-i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y), \quad \alpha \text{ は実定数}$$

a^\dagger, a の交換関係

$$[a, a^\dagger] = \alpha^2 [-i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y, i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y] = -2\alpha^2 i [\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y] = 2\alpha^2 \frac{e\hbar B}{c}$$

$[a, a^\dagger] = 1$ となるように α を選ぶ $\rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}}$ 従って、

$$a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}} (i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y), \quad a \equiv \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}} (-i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y).$$

\hat{H}_{orb} を a^\dagger, a を用いて書き換え

$$\hat{H}_{\text{orb}} = \frac{1}{2m} \left[(i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y)(-i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y) + \frac{e\hbar B}{c} \right] = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar \frac{eB}{mc}$$

まとめ — \hat{H}_{orb}

$$\hat{H}_{\text{orb}} = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \quad \omega_c \equiv \frac{eB}{mc} : \text{サイクロトロン振動数} \quad (32)$$

$$\left. \begin{array}{l} a^\dagger \\ a \end{array} \right\} \equiv \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}} (\pm i\hat{\Pi}_x + \hat{\Pi}_y), \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (33)$$

a^\dagger は a のエルミート共役 ← $\hat{\Pi}_x, \hat{\Pi}_y$ は自己共役、かつ、 $i\hat{\Pi}_x$ は $-i\hat{\Pi}_x$ のエルミート共役

- $\hat{H}_{\text{orb}} = \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$ の固有値と固有関数

(a) $a^\dagger a$ の固有値はゼロ以上

$$\text{証明: } 0 \leq \langle a\varphi | a\varphi \rangle = \langle \varphi | a^\dagger a \varphi \rangle$$

↓

最低固有状態 $\varphi_0(x, y)$ は、 $a\varphi_0(x, y) = 0$ を満たす。固有エネルギー: $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_c$

(b) φ が \hat{H}_{orb} の固有状態 $\hat{H}_{\text{orb}}\varphi = \varepsilon\varphi$ ならば、 $a^\dagger\varphi$ も \hat{H}_{orb} の固有状態で、その固有エネルギーは $\varepsilon + \hbar\omega_c$

$$\begin{aligned} \text{証明: } [a^\dagger a, a^\dagger] &= a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger \text{ より } \hat{H}_{\text{orb}} a^\dagger = a^\dagger \hat{H}_{\text{orb}} + a^\dagger \hbar\omega_c \\ \text{従って } \hat{H}_{\text{orb}} a^\dagger \varphi &= a^\dagger \hat{H}_{\text{orb}} \varphi + a^\dagger \hbar\omega_c \varphi = (\varepsilon + \hbar\omega_c) a^\dagger \varphi \end{aligned}$$

(a), (b) より、固有値と固有関数は次のようになる。

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad : \text{Landau 準位} \quad (34)$$

$$\varphi_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \varphi_0(x, y), \quad \text{ただし } \varphi_0 \text{ は } a\varphi_0(x, y) = 0 \text{ の解} \quad (35)$$

φ_n の規格化定数導出は演習問題

- φ_n の具体形 — $\mathbf{A} = (0, Bx)$ と選んだ場合

$$\left. \begin{array}{l} a^\dagger \\ a \end{array} \right\} \equiv \sqrt{\frac{c}{2e\hbar B}} \hbar \left(\pm \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eB}{\hbar c} x \right) = \frac{l_c}{\sqrt{2}} \left(\pm \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x}{l_c^2} \right). \quad (36)$$

$$l_c \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \quad : \text{磁気長} \quad (37)$$

無次元化

$$x = l_c \xi, \quad y = l_c \eta, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l_c} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{l_c} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\left. \begin{array}{l} a^\dagger \\ a \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi \right). \quad (38)$$

a, a^\dagger は座標 y に依存しない $\rightarrow y$ 方向の運動量は保存される

$$\downarrow$$

$$\varphi_n(x, y) = X_n(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\kappa_y \eta) \text{ と置ける。 } (\kappa_y = k_y l_c)$$

$\varphi_0(x, y)$ の表式

$$0 = a\varphi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\kappa_y \eta} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{d\xi} + \kappa_y - \xi \right) X_0(\xi)$$

$$\text{ゆえに } \frac{dX_0(\xi)}{d\xi} = -(\xi - \kappa_y)X_0(\xi) \longleftrightarrow \frac{dX_0}{X_0} = -(\xi - \kappa_y)d\xi$$

$$\text{積分して } X_0(\xi) = A \exp \left[-\frac{(\xi - \kappa_y)^2}{2} \right]$$

規格化

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |X_0(\xi)|^2 dx = |A|^2 l_c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi - \kappa_y)^2} d\xi = |A|^2 \sqrt{\pi} l_c \rightarrow A = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}}}$$

従って、 $\varphi_0(x, y)$ は次のように求まる。

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\kappa_y \eta}$$

状態 n の固有関数

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \varphi_0(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\kappa_y \eta} \frac{1}{\sqrt{n!} \pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{d}{d\xi} - \xi + \kappa_y \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\kappa_y \eta} \frac{1}{\sqrt{n!} \pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} \left[e^{\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} \frac{d}{d\xi} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} \right]^n e^{-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\kappa_y \eta} \frac{1}{\sqrt{n!} \pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} e^{(\xi - \kappa_y)^2} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\kappa_y \eta} \frac{1}{\sqrt{n!} \pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\xi - \kappa_y)^2} H_n(\xi - \kappa_y) \end{aligned}$$

● まとめ — Landau ゲージでの固有値と固有関数

軌道部分の固有値と固有関数

$$\varepsilon_{nk_y k_z} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}. \quad \left(n = 0, 1, 2, \dots; \omega_c = \frac{eB}{mc} \right) \quad (39)$$

$$\varphi_{nk_y k_z}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} l_c^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}} \exp\left[-\frac{(x - k_y l_c^2)^2}{2l_c^2}\right] H_n\left(\frac{x - k_y l_c^2}{l_c}\right) \frac{1}{2\pi} e^{ik_y y + k_z z}. \quad \left(l_c \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}\right) \quad (40)$$

固有エネルギー $\varepsilon_{nk_y k_z}$ が k_y に依らないことに注意 — Landau 準位の大きな縮重度

スピン部分も含めた固有値と固有関数

$$E_{nk_y k_z \sigma} = \varepsilon_{nk_y k_z} - \frac{1}{2} \sigma \hbar \omega_c. \quad \sigma = \begin{cases} +1 & : \uparrow \\ -1 & : \downarrow \end{cases} \quad (41)$$

$$\varphi_{nk_y k_z \uparrow}(\mathbf{r}) = \varphi_{nk_y k_z}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{nk_y k_z \downarrow}(\mathbf{r}) = \varphi_{nk_y k_z}(\mathbf{r}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

• Landau 準位の縮重度

(a) xy 面内の $0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y$ の領域に閉じ込められた粒子を考える ($L_x, L_y \gg l_c$).

(b) y 方向には周期的境界条件 $\rightarrow k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}$ (n_y は整数)

(c) 波動関数 $X_n(x)$ の中心が $0 \leq x \leq L_x$ に入っているための条件

$$0 \leq k_y l_c^2 \leq L_x \iff 0 \leq n_y \leq \frac{L_x L_y}{2\pi l_c^2}$$

(d) 固有状態 n の縮重度: $N = \frac{L_x L_y}{2\pi l_c^2} \iff$ 領域 $2\pi l_c^2$ 当たり到一个の量子状態
(サイクロトロン運動の最小半径 $\sim l_c$)

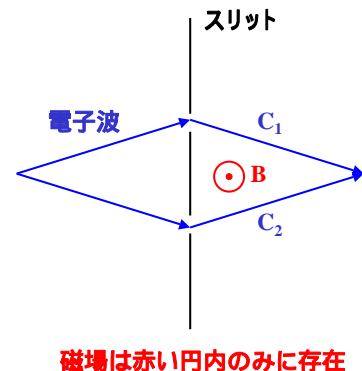
$$\text{別表現: } N = \frac{L_x L_y B}{(hc/e)} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \begin{cases} \Phi: \text{体系内の全磁束} \\ \Phi_0 = \frac{hc}{e} = 4 \times 10^{-7} \text{G} \cdot \text{cm}^2: \text{磁束量子} \end{cases}$$

8.4 Aharonov-Bohm 効果 (AB 効果)

一点から放射された電子波が、磁場のある領域の周りを通って後方のスリットで一点に集められる。電子源とスリットの位置は上下対称的にとる。電子波は磁場のある領域には入り込めない。

↓

後方のスリットで集められた電子波の振幅は？



- 軌道運動に対する Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi(\mathbf{r}, t) \quad (43)$$

- ベクトル・ポテンシャルの消去

電子は磁場の無い領域、すなわち、 $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ の領域を通る。

↓

上記の領域では $\mathbf{A} = \nabla \lambda$ と書ける。

変換

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp \left[i \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right] \psi'(\mathbf{r}, t) = \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar c} [\lambda(\mathbf{r}) - \lambda(\mathbf{r}_0)] \right\} \psi'(\mathbf{r}, t) \quad (44)$$

$\psi'(\mathbf{r}, t)$ に対する方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 \psi'(\mathbf{r}, t) \quad : \text{ゼロ磁場の Schrödinger 方程式} \quad (45)$$

- 後方のスリット上での電子波の振幅

$$\begin{aligned} & \left| \psi'(\mathbf{r}, t) \exp \left[i \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0(C_1)}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right] + \psi'(\mathbf{r}, t) \exp \left[i \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_0(C_2)}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right] \right| \\ &= \left| \psi'(\mathbf{r}, t) \left[1 + \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{(C_2-C_1)} \mathbf{A}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right] \right] \right| \quad \Phi_0 \equiv \frac{hc}{e} : \text{磁束量子} \\ &= \left| \psi'(\mathbf{r}, t) \left[1 + \exp \left[i \frac{2\pi}{\Phi_0} \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \right] \right] \right| \\ &= \left| \psi'(\mathbf{r}, t) \left[1 + \exp [2\pi i (\Phi / \Phi_0)] \right] \right| \quad \Phi : \text{領域内の全磁束} \\ &= 2 \left| \psi'(\mathbf{r}, t) \cos \left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right| \quad (46) \end{aligned}$$

磁束密度 B を変化させるとスリット上での電子波の振幅が周期的に変化

$$|\psi(\mathbf{r}, t)| = |\psi'(\mathbf{r}, t)| \times \begin{cases} 1 & : \Phi = 0, \pm\Phi_0, \pm2\Phi_0, \dots \\ 0 & : \Phi = \pm\frac{1}{2}\Phi_0, \pm\frac{3}{2}\Phi_0, \dots \end{cases} \quad (47)$$

電子波が通過する領域外にある磁場の影響を受ける — AB 効果

ベクトル・ポテンシャル \mathbf{A} は量子力学において本質的役割を果たす！

- 関数 $\lambda(\mathbf{r})$ の具体形 — $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla\lambda(\mathbf{r})$

円柱座標 $\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ での微分 — $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$

$$\nabla\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (48)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho A_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z \quad (49)$$

磁場は z 方向を向き、 $\rho \leq a$ の領域に閉じ込められている。

円柱対称な z 方向の磁場に対するベクトル・ポテンシャルのゲージ選択 — $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho A_\varphi(\rho) \mathbf{e}_z = \begin{cases} B\mathbf{e}_z & : \rho \leq a \\ \mathbf{0} & : \rho > a \end{cases} \xrightarrow{\text{積分}} A_\varphi(\rho) = \begin{cases} \frac{B}{2}\rho + \frac{C}{\rho} & : \rho \leq a \\ \frac{C'}{\rho} & : \rho > a \end{cases}$$

ここで、(a) $A(\rho = 0)$ が正則 $\rightarrow C = 0$; (b) $A(\rho = a)$ が連続 $\rightarrow C' = Ba^2/2$ 。

↓

$$A_\varphi(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d\lambda}{d\rho} = \begin{cases} \frac{B}{2}\rho & : \rho \leq a \\ \frac{Ba^2}{2\rho} & : \rho > a \end{cases} \xrightarrow{\text{積分}} \lambda = \begin{cases} \frac{B}{2}\rho^2\varphi & : \rho \leq a \\ \frac{Ba^2}{2}\varphi & : \rho > a \end{cases} \quad (50)$$

$\lambda(\rho > a)$ は原点の周りで多価関数 (原点は特異点) ← 磁場の存在

補足: 中心対称場の運動に対する磁場の影響

- Hamiltonian

$$\hat{H} = \left[\frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2 + V(r) \right] \mathbb{1} - 2\mu_B \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{B}, \quad \hat{\Pi} \equiv \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (51)$$

この静磁場 \mathbf{B} に対するベクトルポテンシャルを $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ と選ぶ。すると、演算子 $\frac{1}{2m} \hat{\Pi}^2$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}^2 &= \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right)^2 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e}{4mc} [\hat{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{p}}] + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2 \\ &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{l}} + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2 \end{aligned}$$

従って、Hamiltonian は次のように書ける。

$$\hat{H} = \left[\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r) \right] \mathbb{1} - \mu_B (\mathbb{1} \hat{\mathbf{l}} + 2\hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})^2 \mathbb{1}, \quad \mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (52)$$

磁場との一次の結合—Zeeman 効果

$$\hat{H}_Z = -\mu_B (\mathbb{1} \hat{\mathbf{l}} + 2\hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{B}. \quad (53)$$