

物理学IIレポート問題10

[1] 二次元のスカラー場 $f(x, y) = x^2 - y^2$ について以下の問いに答えよ。

- (a) $f(x, y) = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ の等高線を xy 平面に描け。
- (b) $\vec{\nabla} f(x, y)$ を求めよ。ただし、 $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ である。
- (c) $(x, y) = (2, 1)$ の点における勾配ベクトル $\vec{\nabla} f(x, y)$ を求め、(a) の図上にそのベクトルを描け。

[2] 以下の問いに答えよ。

- (a) 次の二つのベクトル場 $\vec{v}(\vec{r})$ を xy 平面上 $\vec{r} = (x, y, 0)$ で図示せよ。より具体的には、まず、大きさ $|\vec{v}|$ が一定となる線 (流線) を $|\vec{v}| = 1, 2, 3$ に対して描き、次に、その線上において \vec{v} の方向を、その大きさも考慮して矢印で示せ (参考: 台風の目の周りの風向きとその大きさを描いた風速図)。

$$(i) \vec{v}(\vec{r}) = (x, y, 0)$$

$$(ii) \vec{v}(\vec{r}) = (-y, x, 0)$$

- (b) 前問の (i) と (ii) のそれぞれのベクトル場について、湧き出し $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r})$ と渦度ベクトル $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})$ を求めよ。ただし、 $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ である。

- (c) ベクトル場

$$\vec{v}(\vec{r}) = (xyz, y^2 - x^2, zx)$$

について、湧き出し $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r})$ と渦度ベクトル $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})$ を求めよ。