

9 ガウスの定理とストークスの定理

「電磁気学」は、空気や水の流れを記述する「流体力学」と類似した構造を持っており、同じ数学で記述可能である。水や空気の流れを決めるのに重要な要素として、泉や水道の蛇口などからの「湧き出し」と、台風や竜巻などの「渦」がある。そして、電磁気学でも「湧き出し」と「渦」の概念が有用である。具体的には、電場は電荷から湧き出し、磁場は電流の周りで渦を巻くように作られる。

ここでは、電磁気学を学ぶ準備として、「湧き出し密度」と「渦密度」を数学的に定義するのに用いられる二つの定理、すなわち「ガウスの定理」(湧き出し定理)と「ストークスの定理」(渦定理)を提示し、それらを証明する。ここでの主な結果は、湧き出しに関する(9.1)式と(9.4)式、渦に関する(9.10)式と(9.8)式である。

9.1 湧き出しとガウスの定理

図9.1のように、原点Oに泉があり、そこから水が湧き出している状況を考えよう。水の密度は一定であるものとする。泉から毎秒湧き出す水量は、泉を透過膜Sで覆い、その表面を通して毎秒出てゆく水量を測れば良い。湧き出しには外向きの流れが正の寄与を与え、表面に平行な成分は寄与せず、またその量は通過領域の面積に比例する。これより、求める湧き出し水量の数学的表式が、表面上で水の流れの速度 \vec{v} と外向き単位法線ベクトル \vec{n} との内積をとり、面積素 dS をかけて積分した量

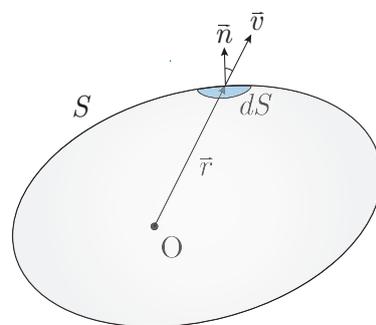


図 9.1: 点 O からの水の湧き出し

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

に比例することがわかる。その比例定数は密度に等しい。

上記の面積分に別表現を与えたのが、

ガウスの定理

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d^3r \quad (9.1)$$

である。ただし、添字 V は S で囲まれた 3次元領域を表し、

$$d^3r = dx dy dz \quad (9.2)$$

は無限小領域の体積、すなわち体積素である。また $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ は、ナブラ演算子

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (9.3)$$

と速度場 \vec{v} との内積、すなわち

湧き出し密度

$$\operatorname{div} \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (9.4)$$

を表す。ここで div は $\vec{\nabla} \cdot$ の別表現で、英単語の divergence (発散) に由来する。(9.1) 式の $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ が湧き出し密度の意味を持つことは、左辺が S を通って毎秒出てゆく水量、すなわち総湧き出し量を表すことから理解できる。

9.2 ガウスの定理の証明

ガウスの定理の証明は二段階で行える。第一に、図 9.2(a) の微小な直方体を考察する。その内部と表面上の一般点を $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ で表すことにする。まず、 x 軸に垂直な A 面と B 面からの (9.1) 式左辺への寄与に注目する。それぞれの面上での外向き単位法線ベクトルは、それぞれ $\vec{n} = (1, 0, 0)$ と $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ である。また、面上の点はそれぞれ $(x + \Delta x, y_1, z_1)$ および (x, y_1, z_1) と表せ、面積素は共に $dS_1 = dy_1 dz_1$ である。さらに、微小な直方体内では $\vec{v}(\vec{r}_1)$ がほとんど変化しないことを考慮すると、この二つの面からの (9.1) 式左辺への寄与が、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \int_{A+B} \vec{v}(\vec{r}_1) \cdot \vec{n}(\vec{r}_1) dS_1 &= \int_y^{y+\Delta y} dy_1 \int_z^{z+\Delta z} dz_1 \{v_x(x + \Delta x, y_1, z_1) - v_x(x, y_1, z_1)\} \\ &\approx \int_y^{y+\Delta y} dy_1 \int_z^{z+\Delta z} dz_1 \frac{\partial v_x(x, y_1, z_1)}{\partial x} \Delta x \\ &= \int_y^{y+\Delta y} dy_1 \int_z^{z+\Delta z} dz_1 \frac{\partial v_x(x, y_1, z_1)}{\partial x} \int_x^{x+\Delta x} dx_1 \\ &\approx \int_y^{y+\Delta y} dy_1 \int_z^{z+\Delta z} dz_1 \int_x^{x+\Delta x} dx_1 \frac{\partial v_x(x_1, y_1, z_1)}{\partial x_1} \\ &= \int_V d^3 r_1 \frac{\partial v_x(\vec{r}_1)}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

y 軸に垂直な二つの面と z 軸に垂直な二つの面からの寄与も同様に計算できるので、微小な直方体表面を通しての湧き出し量が、

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \approx \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d^3 r \quad (9.5)$$

と表せることがわかる。この式は、直方体の体積を無限小とする極限で厳密な式となる。

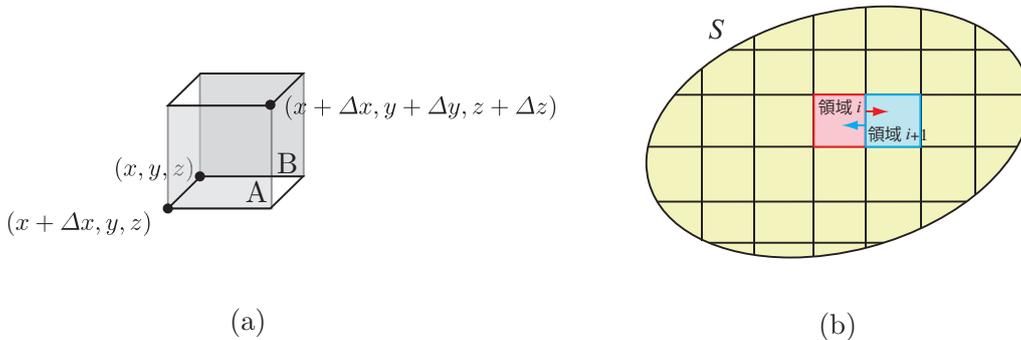


図 9.2: ガウスの定理の証明: (a) 微小な直方体 ; (b) 一般の 3次元領域.

第二に、図 9.2(b) のように、曲面 S で囲まれた有限の領域を、微小な直方体に分割して考察する。まず、(9.5) 式を微小な直方体に関して総和すると、

$$\sum_i \int_{S_i} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \approx \sum_i \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) d^3r \quad (9.6a)$$

が得られる。その左辺では、隣り合う直方体の共有面からの $\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})$ への寄与が、 \vec{n} が逆向きであることで相殺する (図 9.2(b) の断面図参照)。つまり、内部の面積分の寄与がゼロとなり、

$$\sum_i \int_{S_i} \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \quad (9.6b)$$

が成立する。また、体積積分に関しては、加法性

$$\sum_i \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) d^3r = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) d^3r \quad (9.6c)$$

が成り立つ。(9.6b) 式と (9.6c) 式を (9.6a) 式に代入し、分割数を無限大 (微小直方体の体積を無限小) とする極限をとると、(9.1) 式が得られる。 ■

9.3 渦とグリーンの定理

渦密度の定義式を、まず 2 次元空間で求めよう。図 9.3 の二つのベクトル場を眺めた時、(a) に渦はなく、(b) には渦がある、と判断するのは適切に思われる。この判断を数学的に明確に下すには、適当な閉曲線 C を選び、その各点でベクトル場 $\vec{v}(\vec{r})$ と無限小移動のベクトル $d\vec{r}$ との内積をとって、

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

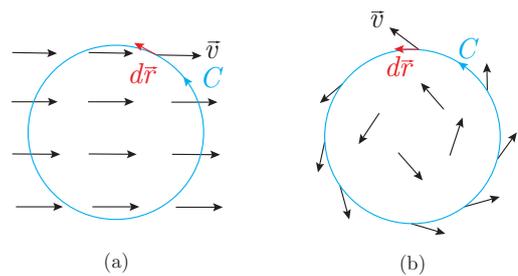


図 9.3: 二つのベクトル場

と一周積分すれば良い。積分記号についた \circ は、反時計回りの一周積分を表すものとする。閉曲線に沿った $d\vec{r}$ は、一周する過程で方向が 360° 回転する。従って、上記の積分が有限に残れば、 C 上ではベクトル場 \vec{v} が渦巻いていると断言でき、また、積分値の大小・正負で渦の強さ・方向も定量的にわかるであろう。例えばこの基準を図 9.3 に適用すると、(a) のほぼ一様なベクトル場では積分値が 0 となり、(b) の渦巻くベクトル場では有限な値となることから、詳細な計算なしに予想できる。このように、上記の積分は、渦の有無・強度・方向についての定量的な指標となっている。

上記の線積分に別表現を与えたのが

グリーンの定理

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S \left\{ \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} \right\} dx dy \quad (9.7)$$

である。ここで、積分記号の添字 S は C で囲まれた 2 次元領域を表し、 $dx dy$ は面積素である。左辺は C 上での渦の強さを表しているが、それが右辺において C 内での面積分、す

なわち2次元空間での“体積”積分として表されている。従って、右辺の被積分関数は渦密度の意味を持つことがわかる。ただし、ここでの密度は単位面積あたりの密度、すなわち面密度である。次元解析の観点からも、被積分関数が、面積素 $dxdy$ の逆数の次元 m^{-2} に比例することが結論づけられる。

この渦密度は、ナブラ演算子 (9.3) とベクトル場 \vec{v} とのベクトル積、すなわち、

渦密度ベクトル

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (9.8)$$

へと一般化される。その方向は、右手の人差し指から小指を揃えて渦方向に回すとき、立てた親指が指す方向である。実際、 xy 平面での渦に関する (9.7) 式右辺の被積分関数は、(9.8) 式の z 成分に一致する。rot は $\vec{\nabla} \times$ の別表現である。rot の代わりに curl (渦巻き) が使われることも多い。

9.4 グリーンの定理の証明

グリーンの定理を証明しよう。まず、(9.7) 式右辺の括弧内第二項の積分を考察する。この積分を、図 9.4(a) のように、① x を決めて縦方向 (y 方向) に積分した後、② 横方向に x 積分を実行し、次のように変形する。

$$\begin{aligned}
 & - \iint_S dx dy \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dy \frac{\partial v_x(x, y)}{\partial y} \quad \text{y 積分を実行} \\
 & = - \int_{x_1}^{x_2} dx \{ v_x(x, Y_2(x)) - v_x(x, Y_1(x)) \} \\
 & \quad \text{第一項で積分の上下限を入れ換え} \\
 & = \int_{x_2}^{x_1} dx v_x(x, Y_2(x)) + \int_{x_1}^{x_2} dx v_x(x, Y_1(x)) \quad \text{これは } C \text{ 上の線積分} \\
 & = \oint_C v_x(x, y) dx. \quad (9.9a)
 \end{aligned}$$

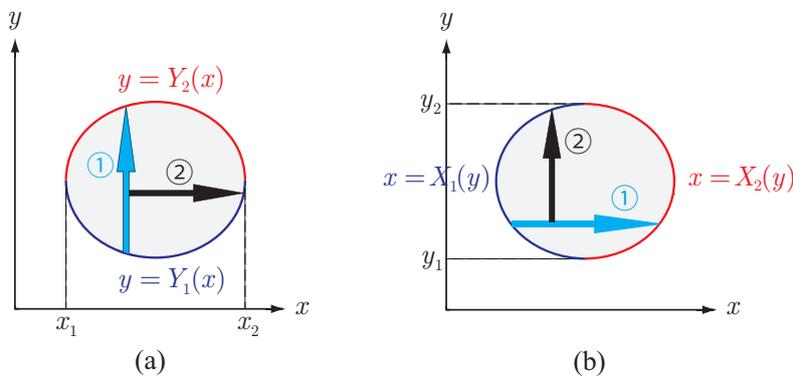


図 9.4: グリーンの定理の証明における二重積分の実行

次に、(9.7) 式右辺の括弧内第一項の積分に注目する。この積分を、図 9.4(b) のように、① y を決めて横方向 (x 方向) に積分した後、② 縦方向に y 積分を実行し、次のように変形する。

$$\begin{aligned} \iint_S dx dy \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} &= \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} dx \frac{\partial v_y(x, y)}{\partial x} = \int_{y_1}^{y_2} dy \{v_y(X_2(y), y) - v_y(X_1(y), y)\} \\ &= \int_{y_1}^{y_2} dy v_y(X_2(y), y) + \int_{y_2}^{y_1} dy v_y(X_1(y), y) \\ &= \oint_C v_y(x, y) dy. \end{aligned} \tag{9.9b}$$

(9.9a) 式と (9.9b) 式を辺々加えあわせると定理が得られる。 ■

上の証明における (9.9a) 式の変形は、曲線 C が「一つの x に高々二つの $y = Y_1(x), Y_2(x)$ が対応する二価関数」として表される場合にのみ有効である。従って、例えば図 9.5 のように、曲線 C 上のある $x = x_0$ について「四価関数」となるような場合には、この証明はそのままでは適用できない。しかし、適当な直線 L を引いて C を C_1 と C_2 に分割すると、 C_1 と C_2 のそれぞれで上の証明が成立する。そして、挿入した L 上の線積分は、 C_1 と C_2 で逆向きとなって相殺される。従って、 $C = C_1 + C_2$ についても定理が成立することになる。より一般的な閉曲線の場合も、同様の議論で定理の成立を示すことが可能である。

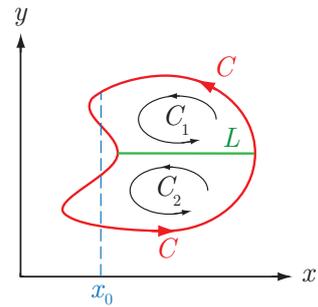


図 9.5: より複雑な閉曲線 C

9.5 ストークスの定理

グリーンの定理 (9.7) を 3次元空間へと拡張したのが、

ストークスの定理

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS \tag{9.10}$$

である。ここで、図 9.6 のように、 C は 3次元空間内の方向つき閉曲線、 S は C を縁とする曲面、 $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ は (9.8) 式で定義された渦密度ベクトル、また、 \vec{n} は S 上の単位法線ベクトルで、その方向は、右手の人差し指から小指を揃えて C に沿って回すとき、立てた親指が指す方向である。

曲線 C 上でベクトル場 \vec{v} が渦巻いているかどうか、およびその強度を調べるには、 C に回る向きを与え、 C 上で \vec{v} とベクトル線素 $d\vec{r}$ との内積をとって線積分すれば良い。これが (9.10) 式の左辺である。ストークスの定理は、そのように直観的に定義された C 上での渦強度が、右辺のように、曲線 C を縁とする曲面 S 上での $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}$ の面積分に変換できることを表している。(9.10) 式で $\vec{v}(\vec{r}) = (v_x(x, y), v_y(x, y), 0)$ として曲面 S を xy 平面上に選ぶと、 $\vec{n}(\vec{r}) = (0, 0, 1)$ となり、(9.10) 式は 2次元空間におけるグリーンの定理に帰着する。

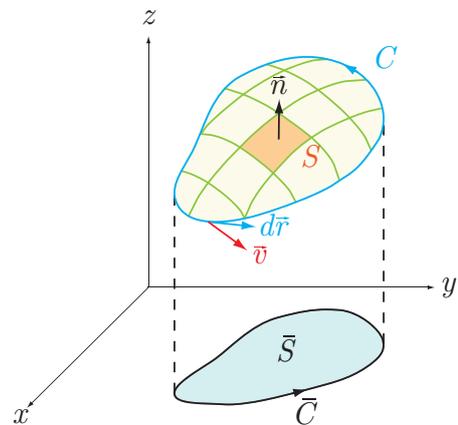


図 9.6:

9.6 ストークスの定理の証明

ストークスの定理の証明は、(9.10) 式の v_x が関与する項，すなわち，

$$\oint_C v_x dx = \iint_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} n_y - \frac{\partial v_x}{\partial y} n_z \right) dS \quad (9.11)$$

について行えば十分である．なぜなら， v_y 成分と v_z 成分のそれぞれについても同様の証明が独立に実行でき，(9.10) 式はそれら三つの式を足し合わせることで得られるからである．また，曲面 S が一価関数 $z = f(x, y)$ で表される場合を考察する．より一般的な場合には，図 9.5 にならって，曲面を分割して各曲面上で一価性が成り立つようにし，その後，分割した曲面についての和を取れば良い．

曲面 S 上の点は， $\vec{r} = (x, y, f(x, y))$ のように， (x, y) をパラメータとして表現できる．対応する面積素 dS と単位法線ベクトル \vec{n} は，予備的計算

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

と (8.15) 式を用いて，

$$dS = D dx dy, \quad D \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1}, \quad (9.12a)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{D} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{1}{D} \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \quad (9.12b)$$

と得られる．ただし \vec{n} の方向は， C の向きと整合するよう選ばれている．

証明の出発点は，グリーンの定理 (9.7) で速度場が x 成分のみの式

$$\int_{\bar{C}} \bar{v}_x(x, y) dx = - \int_{\bar{S}} \frac{\partial \bar{v}_x(x, y)}{\partial y} dx dy \quad (9.13)$$

である．ここで， xy 平面上での曲面・曲線・ベクトル場を \bar{S} ， \bar{C} ， \bar{v} で表し，3次元空間内のものと区別した．その \bar{S} と \bar{C} を，図 9.6 のように， S と C の xy 平面への射影に選ぶ．また， $\bar{v}_x(x, y)$ が曲面 S 上での $v_x(\vec{r})$ に一致する場合，すなわち，

$$\bar{v}_x(x, y) = v_x(x, y, f(x, y))$$

の場合を考察する．すると，(9.13) 式の y に関する偏微分は，微分の連鎖律を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial v_x(x, y, f(x, y))}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{z=f(x, y)} \end{aligned}$$

と表せる．これらを (9.13) 式に代入すると，

$$\int_{\bar{C}} v_x(x, y, f(x, y)) dx = - \int_{\bar{S}} \left(\frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{z=f(x, y)} dx dy \quad (9.14)$$

が得られる．ここで，

$$\int_{\bar{C}} v_x(x, y, f(x, y)) dx = \int_C v_x(x, y, z) dx \quad (9.15a)$$

$$dx dy = n_z(\vec{r}) dS \quad (9.15b)$$

が成り立つことに注意する。(9.15a) 式は右辺の積分の定義式に他ならず, また, (9.15b) 式は (9.12) 式から容易に導ける。(9.15) 式を用いると, (9.14) 式が

$$\int_C v_x(x, y, z) dx = - \int_S \left\{ \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial y} n_z(\vec{r}) + \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} n_z(\vec{r}) \right\} dS \quad (9.16)$$

へと書き換えられる。さらに (9.12b) 式から,

$$-\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} n_z(\vec{r}) = n_y(\vec{r})$$

が成立することがわかる。この式を (9.16) 式に代入すると, (9.11) 式が得られる。 ■