

9 クーロンの法則

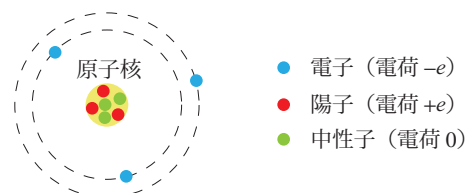
9.1 原子

我々の世界を形作る様々な物質は原子の集合体である。その原子はまた、原子核とその周りを運動する電子 (electron) からできている。電子軌道の半径は 10^{-10}m 程度である。一方、原子核の半径は 10^{-15}m 程度で、電子軌道の半径に較べて極めて小さい。さらに原子核は、陽子 (proton) と中性子 (neutron) から成る。電子の質量は、 $m_e = 9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$ で、陽子や中性子の質量 $m_p \approx m_n = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$ に較べて非常に小さい。一方電気的には、中性子が中性であるのに対し、陽子と電子は同じ大きさ

$$e = 1.60 \times 10^{-19}\text{C} \quad (9.1)$$

で反対符号の電荷を持っており、陽子の電荷が正と定義されている。ここで現れた C は電荷の単位で、「クーロン」と読む。安定な原子における電子と陽子の数は同じで、電気的に中性である。

以上の原子の構造は、原子の殻模型で直感的に理解できる。右の図は陽子3個と電子3個を持つ Li 原子の模式図である。電子の運動する軌道は量子化されており、半径の小さい軌道から電子が詰まっていく。一番内側の軌道から順に、K 殻 ($n = 1$ の殻)、L 殻 ($n = 2$ の殻)、M 殻 ($n = 3$ の殻) と名付けられ、それぞれ 2, 8, 18 個 (一般に $2n^2$ 個) の電子が収容可能である。メンデレーエフの周期表は、この原子の殻模型で理解できる。



Li 原子の構造模式図

9.2 物質と帯電

固体は周期的に配列した原子から構成されている。固体内の電子は、最外殻にある電子が特定の原子に束縛されているか否かで、「絶縁体」と「金属」に大別でき、その中間の性質を示す物質群として「半導体」がある。金属では電子が固体内を自由に移動できるので「電流」が流れ得るのに対し、絶縁体は電気を通さない。

二つの絶縁体をこすると、一方から他方に電子が移り電気的中性が破れることがある。エボナイト棒を乾いた布でこすったり、プラスチックの下敷きを衣服でこすったりした場合がそうである。このように、物質の電気的中性条件が破れることを、「帯電」という。帯電は我々に身近な物理現象である。乾燥した冬に金属のドアノブを触ると、バチッと音がして急激な (不愉快な) 「放電」が起こることがある。これは、帯電した我々の身体に溜まった電荷が、指先を通して金属のドアノブに急激に流れることで起こる。体の帯電は乾燥している冬に起こりやすい。一方、湿った夏には体から空気中への放電が自然に起こり、ドアノブなどでの急激な放電は生じない。

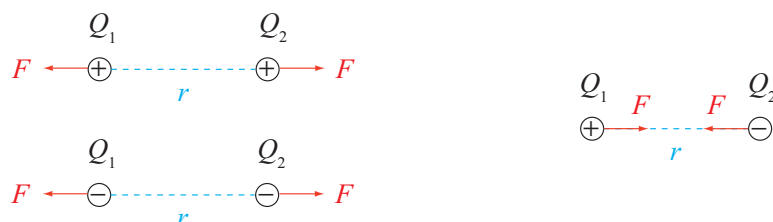
9.3 クーロンの法則

1785 年に、フランス人のクーロンは、ねじり天秤を用いた実験により、二つの荷電粒子間に次の法則が成り立つことを見出した。「電荷 Q_1 と Q_2 を持つ二つの荷電粒子の間に

は、電荷の積 Q_1Q_2 に比例し、それらの距離 r の二乗に反比例する大きさの力 F が働く。力の方向は二つの荷電粒子を結ぶ直線上にあり、比例定数 k は正である。」式で表すと、次のようになる。

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (9.2)$$

したがって、電荷の符号が同じ場合には「斥力」が、異なる場合には「引力」が働くことになる。クーロンの法則は、ニュートンの万有引力の法則と同じ形をしており、力の距離に関する逆二乗則が自然界の普遍法則であることを予想させる内容になっている。



クーロンの法則における「距離 r の二乗に反比例する」という事実には、当然の事ながら実験誤差が含まれているので、どの程度正確に成り立っているかを確認する必要がある。 r^{-2} を $r^{-2-\delta}$ と置きかえて δ の大きさを評価する作業も行われてきた。その値の変遷は次の通りである。

$$\begin{aligned} |\delta| < \frac{1}{50} & \quad \text{キャベンディッシュ (1773 年)} \\ |\delta| < \frac{1}{21600} & \quad \text{マクスウェル (1870 年代)} \\ |\delta| < 2 \times 10^{-9} & \quad \text{現代} \end{aligned}$$

実は、クーロンに先立つこと約 10 年、英国人のヘンリー・キャベンディッシュが、クーロンの法則が成り立つことを見出していた。しかし、彼はその成果を公にしなかったので、(9.2) 式は「クーロンの法則」の名前で呼ばれている。

比例定数 k の大きさは、電荷の大きさをどのように表すかに依存する。現在、最も標準的に用いられているのが「MKSA 有理単位系」であり、そこでは基本単位として次のものが採用されている。

MKSA 有理単位系の基本単位

長さ： m (メートル)
 質量： kg (キログラム)
 時間： s (秒)
 電流： A (アンペア)

「MKSA 有理単位系」の MKSA は、各単位の最初のアルファベットをつないだものである。また、補助単位として次のものがある。

MKSA 有理単位系の補助単位

力： N (ニュートン) $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
 エネルギー： J (ジュール) $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
 電荷： C (クーロン) $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$

電流・力・エネルギー・電荷の単位には、いずれもそれぞれに関連の深い物理学者の名前が用いられている。

MKSA 単位系における比例定数 k は、1C の電荷を持つ二つの点電荷が 1m 離れた距離にある時に働く力の測定から決めることができ、 $k = 8.9876 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ の値を持つことがわかっている。MKSA 有理単位系では、この k を、単位球の表面積 4π を用いて

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \quad (9.3)$$

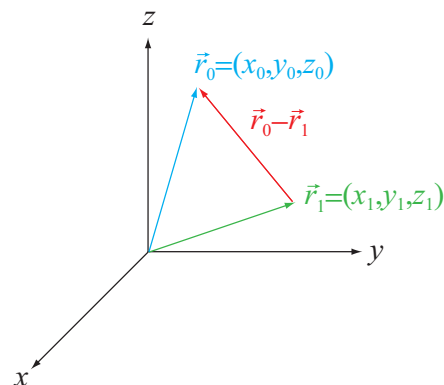
と表す。 ϵ_0 は「真空の誘電率」と呼ばれる。この比例定数を用いると、クーロンの法則は次のように表現できる。

クーロンの法則

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (9.4)$$

9.4 クーロンの法則のベクトル表現

クーロンの法則の数式表現 (9.4) は、ベクトルを用いることで、力の方向まで表現できるように改良できる。図中の位置ベクトル $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ と $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ で表される 2 点に、それぞれ電荷 Q_0 と Q_1 がある場合を考える。ベクトルは、 $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_1$ のように、矢印の代わりにボールドフェイスで表すことにする。2 点の間の距離は、



$$|\vec{r}_0 - \vec{r}_1| \equiv [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2]^{1/2} \quad (9.5)$$

と書ける。従って、電荷 Q_1 が Q_0 に及ぼす力の大きさは、クーロンの法則 (9.4) により、

$$F(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^2} \quad (9.6)$$

となる。これに力の方向まで加えるには、 \vec{r}_1 から \vec{r}_0 方向へ向かう単位ベクトル

$$\frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} \quad (9.7)$$

をかければ良い。そのようにして、力の方向まで取り込んだベクトル表現のクーロンの法則が、

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0 Q_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|} = \frac{Q_0 Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|^3}. \quad (9.8)$$

と得られる。これは、電荷 Q_1 が (位置 \vec{r}_0 にある) 電荷 Q_0 に及ぼす力を表している。また、力の方向は、 $Q_0 Q_1 > 0$ (同符号) の時に $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ 方向 (斥力)、 $Q_0 Q_1 < 0$ (異符号) の時に $-(\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$ 方向 (引力) となり、方向まで正しく表現されていることが理解できる。

9.5 重ね合わせの原理

(9.8) 式は、多数の電荷がある場合に拡張できる。位置 \vec{r}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) に電荷 Q_j がある場合を考える。これら n 個の電荷が、位置 \vec{r}_0 にある電荷 Q_0 に及ぼす力は、(9.8) 式を n 個の電荷について足しあわせた形

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_0 Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0 - \vec{r}_j}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_j|^3} \quad (9.9)$$

に表現できることが、実験からわかっている。(9.9) 式が成立することを、「重ね合わせの原理が成り立っている」と表現する。

9.6 遠隔作用と近接作用

(9.8) 式は、ニュートンの万有引力の法則と同様に、離れた位置にある二個の点電荷が直接力を及ぼし合う形になっている。従って、一個の点電荷が存在しても空間に何の変化も生じないことになる。18世紀から19世紀後半にかけては、この「遠隔作用」の立場が支配的であった。一方、実験家ファラデー(1791–1867)は、この遠隔作用の立場に疑問を持ち、電荷が空間を歪めることで力が伝わるのではないかと考えた。ファラデーの考えを数式に表現したのがトムソン(1824–1907)とマクスウェル(1831–1879)である。

ファラデーの着想を数式で表現すると、(9.8) は次のように書き換えられる。

$$\vec{F}(\vec{r}_0) = Q_0 \vec{E}(\vec{r}_0) \quad : \text{力}, \quad (9.10)$$

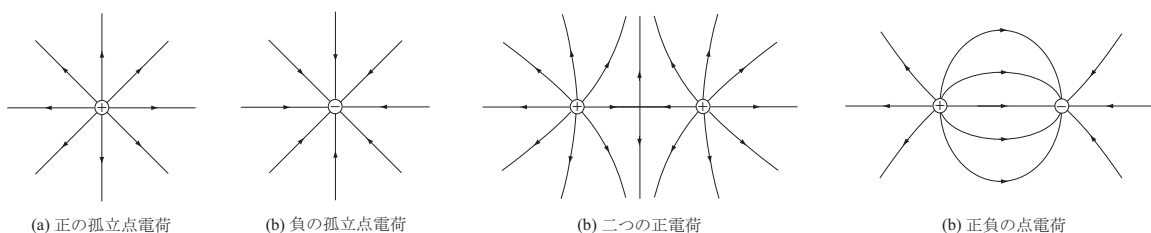
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad : \text{電場}. \quad (9.11)$$

つまり、電荷の存在により、空間の歪みを表す「電場」 $\vec{E}(\vec{r})$ が生じるという考えである。この「場」が実在するとする立場を「近接作用」の立場という。遠隔作用の立場と異なり、この場は、一個の電荷のみが存在する場合にも生じることになる。場が実在することは、後にヘルツ(1857–1894)により、電磁波の放射として実験的に証明された。場の概念は、現代物理学の基礎となっている。電場の単位は N/C である。

近接作用の立場による(9.9) 式は、やはり(9.10) 式のように表され、電場の表現が

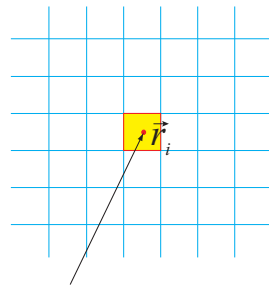
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (9.12)$$

へと変化することになる。電場は、下図のように電気力線として可視化することが可能である。



9.7 電荷が連続的に存在する場合の電場

電荷が連続的に分布している場合には、空間を微小な領域に分割してその各領域からの電場を重ね合わせれば良い。具体的に、位置 \vec{r} における電荷密度を $\rho(\vec{r})$ とし、空間を微小な直方体に分けて添字 i で区別する。領域 i の電荷は、 \vec{r}_i での電荷密度に領域の体積 $\Delta^3 r_i \equiv \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ をかけることで、 $Q_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta^3 r_i$ と得られる。従って、領域 i の電荷が位置 \vec{r} に作る電場は、



微小な直方体： i
 体積： $\Delta^3 r_i$
 電荷密度： $\rho(\vec{r}_i)$
 電荷： $\rho(\vec{r}_i) \Delta^3 r_i$

$$\frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} = \frac{\rho(\vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta^3 r_i \quad (9.13)$$

と表せる。この表現を領域 i について足し合わせ（重ね合わせ）ると、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \rho(\vec{r}_i) \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \Delta^3 r_i$$

となる。さらに分割を無限に小さくすることで、和は積分に移行し、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (9.14)$$

が得られる。ここで、積分変数を $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'$ と置き換えた。

9.8 ディラックのデルタ関数（数学）

電荷が連続的に分布する場合の (9.14) 式は、点電荷の場合の (9.12) 式を一般化した式である。実際、(9.12) 式は (9.14) 式から再現できる。このことを見るために、まず、ディラックのデルタ関数を定義しよう。具体的に、このデルタ関数は、次の性質を持つ関数として定義されている。

ディラックのデルタ関数（定義）

$$1. \delta(x) = \begin{cases} \infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases} \quad (x = 0 \text{ のみで非零})$$

$$2. \delta(-x) = \delta(x) \quad (\text{偶関数})$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{積分すると 1})$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

「超関数」の一つであるディラックのデルタ関数は、「極限形で定義するとわかりやすいかもしれない。具体的に、 $a > 0$ をパラメーターとして含む次の関数を考える。

$$g(x; a) \equiv \frac{1}{2} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} = \frac{1}{2} \tanh(ax). \quad (9.15)$$

この関数は、 $x \pm \infty$ で $\pm \frac{1}{2}$ の値をとる奇関数で、かつ単調増加関数である。この $g(x; a)$ を x について微分した関数

$$g'(x; a) \equiv \frac{2a}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} = \frac{a}{2 \cosh^2(ax)} \quad (9.16)$$

は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(x; a) dx = g(\infty; a) - g(-\infty; a) = 1 \quad (9.17)$$

および $g'(0; a) = a/2$ を満たす（上図は $a = 5$ の場合の $g(x, a)$ と $g'(x, a)$ ）。すなわち、 x 軸と囲む面積が常に 1 であり、原点での値は a に比例して増大する。ディラックのデルタ関数は、この $g(x; a)$ を用いて、

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} g'(x; a) \quad (9.18)$$

と定義できる。

ディラックのデルタ関数を三次元に拡張すると、位置ベクトル $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ を用いて

$$\delta^3(\vec{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (9.19)$$

と表現できる。

9.9 (9.12) 式の再現

(9.19) を用いると、点電荷 Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) が位置 \vec{r}_j にある場合の電荷密度 $\rho(\vec{r})$ が

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n Q_j \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_j) \quad (9.20)$$

と表せる。この式を (9.14) に代入してデルタ関数の性質を用いると、

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n Q_j \int \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_j) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \end{aligned} \quad (9.21)$$

となって、(9.12) 式が再現できた。

