

8 多次元空間での微積分

電磁気学を学ぶには、多次元空間での微積分の知識が必須となる。その基礎を理解する。

8.1 偏微分

独立変数を3つ持つ関数 $f(x, y, z)$ を考察する。 f の x 方向の偏微分を、

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (8.1)$$

で定義する。ここで $\equiv$ は定義式を表す。すなわち、 y と z を定数と見なして通常の x 微分を行うのである。高階の偏微分も同様に定義でき、例えば次のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} &\equiv \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} &\equiv \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial x}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

例題 8.1 関数 $f(x, y, z) = xy^2$ について次の偏微分を計算せよ。

- (1) $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$.
- (2) $\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial x}$.

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} &= \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy \\ (2) \quad \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial(y^2)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 2y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

8.2 全微分

x, y, z 方向の勾配をまとめて、ベクトルで

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) \equiv \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right) \quad (8.3)$$

と表すと便利である。ただし、 $\vec{\nabla}$ は

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (8.4)$$

で定義されたベクトル演算子ナブラである。(8.3) 式は簡略化して $\vec{\nabla} f$ あるいは $\text{grad } f$ のようにも表現される。

勾配 $\vec{\nabla} f$ を用いると, $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ から $\vec{r} + d\vec{r} \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$ へと無限小移動した際の関数 f の変化 df が, 無限小移動のベクトル

$$d\vec{r} \equiv (dx, dy, dz) \quad (8.5)$$

と勾配 (8.3) を用いて,

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (8.6)$$

と表せる. すなわち, 無限小移動に際しての関数 f の変化 df は, 勾配 $\vec{\nabla} f$ と移動ベクトル $d\vec{r}$ との内積 (スカラー積) に等しい. この df を全微分と言う. 特に, 「 $f = \text{一定}$ 」の等高線に沿った微小移動 $d\vec{r}_{\parallel}$ では, $df = 0$ なので,

$$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}_{\parallel} = 0 \quad (8.7)$$

が成立する. これより, 「勾配ベクトルは f の等高線に垂直」であることがわかる. この主張は, 勾配ベクトルが $\vec{0}$ となる例外的な点を除き, 一般的に成り立つ.

8.3 線積分

ある曲線に沿ってある量を足し上げていく操作を線積分という. 曲線は, 数学的には1次元の物体で, 一つのパラメータで表現できる. 例えば xy 平面上の原点を中心とする単位円は, $\vec{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) とパラメータ表示できる. 従って, 線積分も一つの変数で表現可能で, 高校数学の知識で積分を実行できる.

例として, 曲線 C の長さに対する線積分の表式を書き下そう. C 上の点 $\vec{r} = (x, y, z)$ から $\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$ へと無限小移動した際の移動距離は, 変位 $d\vec{r}$ の絶対値

$$ds \equiv \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (8.8)$$

で与えられる. これを線素という. 曲線 C の長さは, この線素を C に沿って次のように線積分することで求まる.

$$\int_C ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (8.9)$$

第一の積分式は, 線積分の簡潔な表式で, C に沿って線素 ds を足し上げることを表している. 第二のパラメータ t を用いた積分式は, 実際の計算に便利な表式である.

例題 8.2 半径 r の円について, その円周の長さを求めよ.

解答 円を xy 平面上に置き, その中心を原点に選ぶと, 円周上の位置ベクトルは, $\vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$ とパラメータ表示できる ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). その線素は

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{(-r \sin \theta)^2 + (r \cos \theta)^2} d\theta = r d\theta$$

のように $d\theta$ を用いて表せる．これを θ について積分することで，円周の長さが，

$$\int_C ds = \int_0^{2\pi} r d\theta = 2\pi r$$

と求まる． ■

より一般的な線積分には，(8.9) 式の被積分関数を 1 からスカラー関数 $f(\vec{r})$ へと変更したものや， ds をベクトル場 $\vec{v}(\vec{r})$ と無限小変位 $d\vec{r}$ との内積で置き換えたもの，すなわち，

線積分 $\int_C f ds \qquad \int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} \qquad (8.10)$

などがある．例えば，第二式で $\vec{v}$ を高度 $f(x, y)$ の勾配 $\vec{\nabla} f(x, y)$ で置き換えると，曲線 C に沿って登った高さが得られ， $\vec{v}$ を力学での力 $\vec{F}$ で置き換えると，曲線 C に沿ってした仕事が求まる．

8.4 面積分

3次元空間における曲面あるいは平面は，3つの変数 (x, y, z) の間に一つの関係式

$$f(x, y, z) = 0 \quad (8.11)$$

を持ち込むことで数学的に記述できる．例えば， xy 平面は $z = 0$ で，原点を中心とする半径 r の球面は方程式 $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ で表せる．曲面上で定義された量についての足し算を面積分という．

面積分の表式を書き下そう．曲面は，数学的には2次元の物体で，2つのパラメータで記述できる．例えば， $z = 0$ 平面上の任意の点は (x, y) で指定できる．また，原点を中心とする半径 r の球面 $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ 上の点は，図 8.1 の二つの角 $\theta \in [0, \pi]$ と $\varphi \in [0, 2\pi]$ を用いた球座標

$$\vec{r} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad (8.12)$$

で表せる．実際に，この表示で $x^2 + y^2 + z^2$ を計算すると，

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta)^2 \\ &= r^2 \{ \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta \} \\ &= r^2 \end{aligned}$$

となり，確かに $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ が成り立っている．

以上の二例，すなわち， $z = 0$ 平面上の点を指定する (x, y) や球面上の点を表すための (θ, φ) のように，任意の曲面上の点の位置ベクトルは，適切に選んだある二つのパラメー

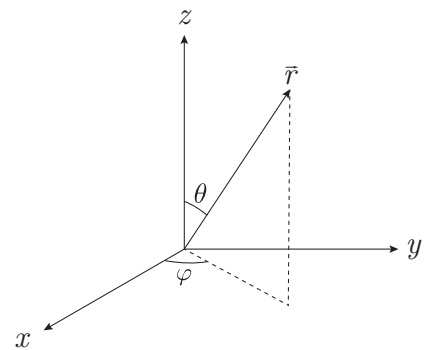


図 8.1: 球座標表示

タ (u, v) を用いて, 一般的に $\vec{r}(u, v)$ と表せる. そのパラメータを $(u, v) \rightarrow (u + du, v + dv)$ のように無限小変化させると, 曲面上での無限小変位が生じる. 対応する位置ベクトルの変化 $d\vec{r}$ は, スカラー関数の全微分の式 $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ をベクトル関数に一般化した式

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} dv \quad (8.13)$$

で表せる. そして, $d\vec{r}$ が曲面内にあることから, 右辺の二つのベクトル

$$\frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} du, \quad \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} dv$$

は, 曲面上の点 $\vec{r}(u, v)$ における接線方向のベクトル, すなわち, 接ベクトルとなっていることがわかる. 従って, それらのベクトル積

$$d\vec{S} \equiv \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} du dv \quad (8.14)$$

は, 方向が曲面に垂直で, 大きさは二つのベクトルの作る平行四辺形の面積に等しい. $d\vec{S}$ をベクトル面積素という. 曲面上での関数 $f(\vec{r})$ の面積分は, (8.14) 式の絶対値, すなわち, 面積素

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v} \right| du dv \quad (8.15)$$

を用いて, 次のように表現できる.

面積分
$\int_S f(\vec{r}) dS.$

(8.16)

積分記号の添字 S は, 表面 (surface) に関する積分であることを明示している.

例題 8.3 原点を中心とする半径 r の球面について, 以下の問いに答えよ.

- (1) 球座標 (8.12) を用いて面積素を求めよ.
- (2) 球面の表面積を求めよ.
- (3) 半径 a の球の体積を求めよ.

解答

- (1) 位置ベクトル $\vec{r}(\theta, \varphi)$ の (θ, φ) に関する偏微分は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned}$$

と計算できる. それらのベクトル積は,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi, r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi, r^2 \sin \theta \cos \theta) = (r \sin \theta) \vec{r}$$

と得られる．これより，ベクトル面積素 (8.14) が $d\vec{S} = \vec{r} r \sin \theta d\theta d\varphi$ と求まり， $\vec{r}$ に平行であること，すなわち球面に垂直であることがわかる．面積素 (8.15) は，その絶対値をとって，

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (8.17a)$$

と得られる．

(2) 表面積は，(8.16) 式で $f(\vec{r}) = 1$ と置いて，次のように計算できる．

$$\begin{aligned} \int_S dS &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta = r^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= r^2 \left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^\pi \left[\varphi \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned} \quad (8.17b)$$

(3) $\vec{r}$ が球表面に垂直外向きのベクトルであることを考慮すると，半径が r と $r + dr$ との間にある無限小領域の体積が，表面積 $4\pi r^2$ に，表面に垂直方向の変位 dr をかけた式

$$4\pi r^2 dr$$

で表せることがわかる．これを $0 \leq r \leq a$ について積分することで，求める体積が

$$\int_0^a 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4\pi}{3} r^3 \right]_{r=0}^a = \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (8.17c)$$

と求まる． ■

例題 8.3(2) での積分のように，多次元積分における $d\theta$ や $d\varphi$ などは，各々の積分区間を明確にするために，対応する積分記号の直後に置くのが慣例である．

8.5 体積積分

空間の各点 $\vec{r} = (x, y, z)$ で定義された関数 $f(\vec{r})$ に，無限小直方体の体積素

$$d^3r = dx dy dz \quad (8.18)$$

をかけ，ある領域 V について積分したものが，

体積積分 $\int_V f(\vec{r}) d^3r \quad (8.19)$
--

である． $f(\vec{r}) = 1$ と選んだ場合の積分は，領域 V の体積を与える．

体積素 d^3r は，直交座標系を用いた表現 (8.18) の他に，領域 V の形に応じた別の表現も用いることができる．例えば，領域 V が球の場合には，例題 8.3 で考察した球座標による表現

$$d^3r = dS dr = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (8.20)$$

を用いるのが便利である.

例題 8.4 次の体積積分を計算せよ.

(1) $x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]$ の直方体領域 V の体積: $I_0 \equiv \int_V d^3r$.

(2) 前問の領域 V に関する体積積分: $I_2 \equiv \int_V (x^2 + y^2) d^3r$.

解答

(1) $I_0 = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz = abc$.

(2) 次のように計算できる.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_V (x^2 + y^2) d^3r = \int_0^a dx x^2 \int_0^b dy \int_0^c dz + \int_0^a dx \int_0^b dy y^2 \int_0^c dz \\ &= \frac{a^3}{3}bc + a\frac{b^3}{3}c = \frac{abc}{3}(a^2 + b^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$