7　電磁気学の基礎概念

7.1　多変数関数と場

物理学では，一般に，多変数関数を用いて自然界の現象を記述する．物理学の基本概念である**場** (field) とは，座標点ごとに一つの値やベクトルが与えられている多変数関数や多変数ベクトル関数である．さらに，値とベクトルの違いを区別し強調する際には，それぞれ，**スカラー場**と**ベクトル場**という言葉を用いる．

スカラー場の例としては，3 次元空間内の各点 $\vec{r} = (x, y, z)$ で値が与えられている空気の密度 $n(\vec{r})$ や気圧 $P(\vec{r})$ が挙げられる．一方，ベクトル場の身近な例としては，川の水の流れや地球上の大気の流れ，海水の循環などを表現する流れの場，すなわち，**速度場** $\vec{v}(\vec{r}) = (v_x(\vec{r}), v_y(\vec{r}), v_z(\vec{r}))$ がある．

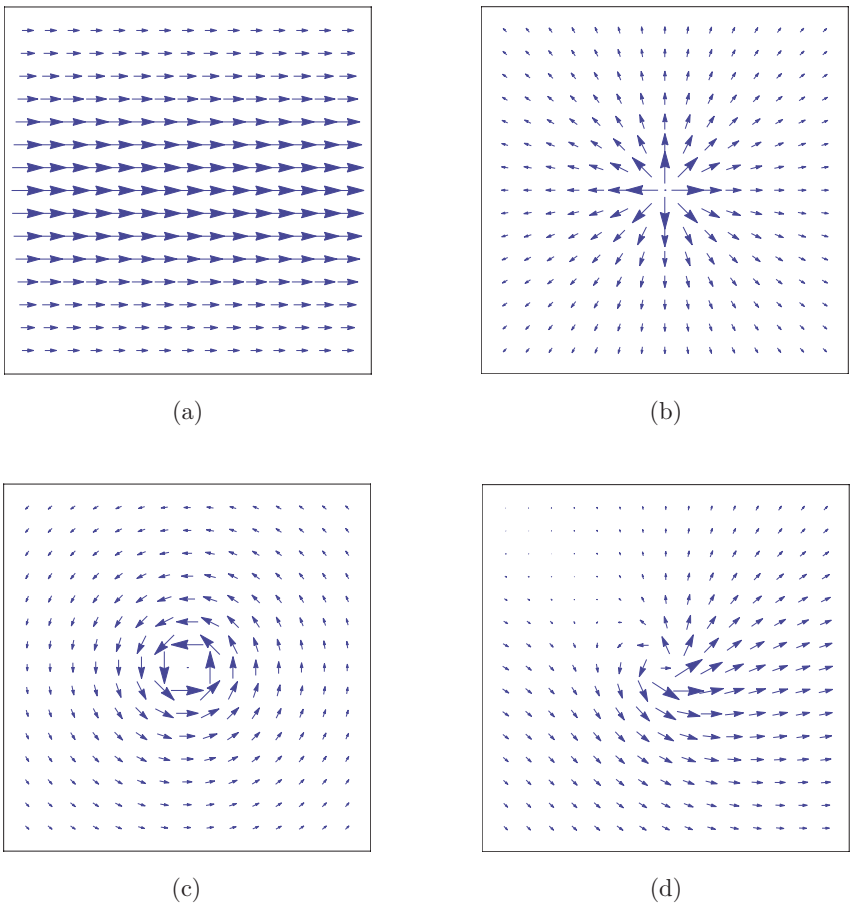


図 7.1: 四つのベクトル場

図 7.1 は 2 次元平面での速度場の四つの例である．(a) は一方向に進む流れで，上下端で速さの減衰が見られる．まっすぐな川の流れでは，このような速度場が形成される．一方，(b) では**湧き出し**が，(c) では**渦**があるのが確認できる．湧き出しとは，泉のように，流れが湧き出す点を表す．また，渦とは，大まかにいって，台風の渦や竜巻の渦などのように，渦巻く流れを表す．(a)，(b)，(c) の三つの速度場を各点で足し合わせると，(d) が出来上がる．この (d) では，渦は目で確認できるものの，湧き出しの存在はやや不明瞭になっている．このように，見た目での湧き出しや渦の確認は，曖昧さをともなう．そこで，数学的に明確な湧き出しと渦の定義を，次回に与えることにする．その理由は，流れ

の場を用いて定義された湧き出しと渦が，電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式において，中心的な役割を担っているからである．

大気の圧力 P や速度 $\vec{v}$ は，場所 $\vec{r}$ に依存するだけでなく，時間 t の関数として，一般に時々刻々と変化する．そのような時間変化のある場合には，P や $\vec{v}$ の独立変数に t も加えて，$P(\vec{r},t)$ および $\vec{v}(\vec{r},t)$ と表すことにする．

7.2 電磁気学と場

電磁気学は，電場や磁場などの**場**によって記述される．流体力学のオイラー方程式が定式化されたのは 1757 年であり，流れの場 $\vec{v}(\vec{r},t)$ を典型例とする場の概念は，18 世紀後半には，すでに流体力学でよく知られたものとなっていた．それを電磁気学に持ち込んだのは，叩き上げの実験家でオイラー方程式など理解できなかったであろうファラデー（1791〜1867）である．

棒磁石の周りに鉄粉を撒くと，鉄粉が紋様を描くのを，中学校の実験で観察された方も多いであろう．この紋様は，おおよそ，図 7.2 の矢印を入れた曲線に沿って作られる．ファラデー自身も同じ実験を行い，その紋様出現の背後に，目には見えない力の場，すなわち，彼が**力線** (lines of force) と呼ぶ場の存在があることを嗅ぎ取った．彼によると，鉄粉の紋様は，この力線（現代の言葉での**力線**磁力線）に沿ってできるのである．ファラデーは，電磁誘導を発見（1831 年）した直後から，この考えを電気現象にまで拡張して適用し，注意深く慎重に，余分の反発を受けないように論文中で発表していった．しかし，当時の科学界は，力は距離を隔てた物体間に直接働くというニュートン力学の世界観に囚われており，ファラデーの主張は異端として大きな反発を受け，数学を駆使する科学者からは嘲笑の対象ともなり，20 年以上の間無視され続けた．目に見えない場などというものは，実体がなく，存在しないというのである．

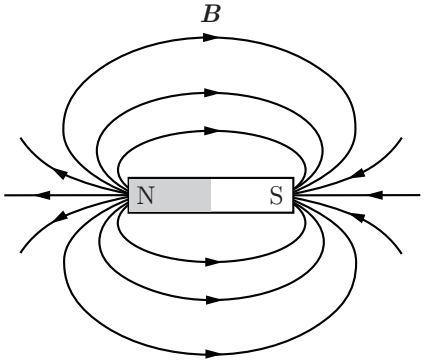


図 7.2: 棒磁石周りの磁束密度

そのような中で，若きマクスウェル（1831〜1879）が，同郷の先達であるトムソン（後のケルビン卿，1824〜1907）によりファラデーの論文へと導かれ，ファラデーの着想に数式表現を与える論文「On Faraday's lines of force」を発表し（1855 年），電磁気学の研究へと没入していく．そして，最終的に電磁場についてのマクスウェル方程式を作り上げ（1861 年），光が電磁場の振動であることを明らかにする（1862 年）に及んで，場は物理学全般に及ぶ主要概念へと躍り出た．後にアインシュタインは，場の概念を持ち込んでニュートン力学を一大変革し，物質があると空間が歪むという一般相対性理論を作り上げることになる（1915 年）．

図 7.2 の棒磁石の周りにできるのは，磁束密度と呼ばれるベクトル場 $\vec{B}(\vec{r})$ であり，それが鉄粉の方向を揃える．電磁気学のもう一方の主役は，電場と呼ばれるベクトル場 $\vec{E}(\vec{r})$ で，電荷を持つ粒子に力を及ぼす．そして，光は，この電磁場の振動に他ならない．その電磁場の時空変化を隈無く記述するのが，(7.5) 式で提示するマクスウェル方程式である．そこでは，図 7.1 で示した流体力学の概念である「湧き出し」と「渦」が，主役を担う．すなわち，マクスウェル方程式は，電場と磁場の湧き出しと渦が，どのように作り出され

るかを，数式という言葉で明快に物語っているのである．それを提示する前に，幾つかの準備を行う．

7.3 原子

我々の世界を形作る様々な物質は原子の集合体である．その原子はまた，原子核とその周りを運動する電子 (electron) からできている．電子軌道の半径は 10^{-10}m 程度である．一方，原子核の半径は 10^{-15}m 程度で，電子軌道の半径に較べて極めて小さい．さらに原子核は，陽子 (proton) と中性子 (neutron) から成る．電子の質量は，$m_{\mathrm{e}} = 9.11 \times 10^{-31}$kg で，陽子や中性子の質量 $m_{\mathrm{p}} \approx m_{\mathrm{n}} = 1.67 \times 10^{-27}$kg に較べて非常に小さい．一方電気的には，中性子が中性であるのに対し，陽子と電子は同じ大きさ

$$e = 1.60 \times 10^{-19}\mathrm{C} \tag{7.1}$$

で反対符号の電荷を持っており，陽子の電荷が正と定義されている．ここで現れた C は電荷の単位で，「クーロン」と読む．安定な原子における電子と陽子の数は同じで，電気的に中性である．

以上の原子の構造は，原子の殻模型で直感的に理解できる．右の図は陽子 3 個と電子 3 個を持つ Li 原子の模式図である．電子の運動する軌道は量子化されており，半径の小さい軌道から電子が詰まっていく．一番内側の軌道から順に，K 殻 ($n = 1$ の殻)，L 殻 ($n = 2$ の殻)，M 殻 ($n = 3$ の殻) と名付けられ，それぞれ $2, 8, 18$ 個（一般に $2n^2$ 個）の電子が収容可能である．メンデレーエフの周期表は，この原子の殻模型で理解できる．

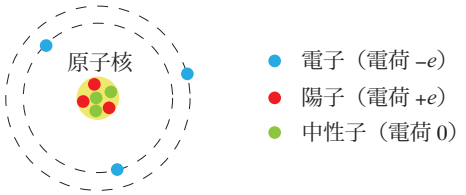


図 7.3: Li 原子の構造模式図

7.4 物質と帯電

固体は周期的に配列した原子から構成されている．固体内の電子は，最外殻にある電子が特定の原子に束縛されているか否かで，「絶縁体」と「金属」に大別でき，その中間の性質を示す物質群として「半導体」がある．金属では電子が固体内を自由に移動できるので「電流」が流れ得るのに対し，絶縁体は電気を通さない．

二つの絶縁体をこすると，一方から他方に電子が移り電気的中性が破れることがある．エボナイト棒を乾いた布でこすったり，プラスチックの下敷きを衣服でこすったりした場合がそうである．このように，物質の電気的中性条件が破れることを，「帯電」という．帯電は我々に身近な物理現象である．乾燥した冬に金属のドアノブを触ると，バチッと音がして急激な（不愉快な）「放電」が起こることがある．これは，帯電した我々の身体に溜まった電荷が，指先を通して金属のドアノブに急激に流れることで起こる．体の帯電は乾燥している冬に起こりやすい．一方，湿った夏には体から空気中への放電が自然に起こり，ドアノブなどでの急激な放電は生じない．

7.5 電荷密度と電流密度

帯電を数学的に記述するために，電荷密度の概念を導入する．この電荷密度は，単位体積あたりの陽子数 $n_{\mathrm{p}}(\vec{r})$ と電子数 $n_{\mathrm{e}}(\vec{r})$ のそれぞれに，陽子の電荷 e と電子の電荷 $-e$ をかけて足し合わせた式

電荷密度

$$\rho(\vec{r}) = en_{\mathrm{p}}(\vec{r}) - en_{\mathrm{e}}(\vec{r}) \tag{7.2}$$

で定義される．この表式より，帯電が，電子と陽子の密度の不均衡から生じることがわかる．電荷密度はスカラー場の一つで，その単位は $\mathrm{C/m^3}$ である．

一方，電荷の流れの一般式は，(7.2) 式右辺の第一項と第二項に，それぞれ陽子の速度 $\vec{v}_{\mathrm{p}}(\vec{r})$ と電子の速度 $\vec{v}_{\mathrm{e}}(\vec{r})$ をかけて足し合わせた式

電流密度

$$\vec{j}(\vec{r}) = e\vec{v}_{\mathrm{p}}(\vec{r})n_{\mathrm{p}}(\vec{r}) - e\vec{v}_{\mathrm{e}}(\vec{r})n_{\mathrm{e}}(\vec{r}) \tag{7.3}$$

となる．しかし，固体中では原子核は静止していて陽子は動かない．また電子に関しても，固体中を自由に動き回ることができるのは，金属の**自由電子** (free electron) など，その一部のみである．一方で，それら一部の自由電子が作る電流は，電気回路に流すことができ，実用面で非常に重要な役割を果たす．自由電子による電流は，しばしば**自由電流**と呼ばれている．その密度 $\vec{j}_{\mathrm{f}}(\vec{r})$ は，自由電子の密度 $n_{\mathrm{f}}(\vec{r})$ に速度 $\vec{v}_{\mathrm{f}}(\vec{r})$ をかけた表式

$$\vec{j}_{\mathrm{f}}(\vec{r}) = -e\vec{v}_{\mathrm{f}}(\vec{r})n_{\mathrm{f}}(\vec{r}) \tag{7.4}$$

で与えられる．

電流密度はベクトル場の一つで，その単位は，電荷密度の単位 $\mathrm{C/m^3}$ と速度の単位 $\mathrm{m/s}$ の積，すなわち，$\mathrm{C/(m^2 \cdot s)}$ である．新たな単位 $\mathrm{A} \equiv \mathrm{C/s}$ を導入すると，電流密度の単位は $\mathrm{A/m^2}$ とも表せる．単位 A は電流の単位で，「アンペア」と読まれる．その由来は，電流と磁気現象の解明に大きく貢献したアンペール (1775〜1836) である．

7.6 マクスウェル方程式

電荷や電流が場を作り出す身近な例としては，地磁気がある．**地磁気**，すなわち地球の磁場は，磁針に作用し，方位を知るのに用いられてきた．南極近傍から出て北極の方に向かうが，その過程で方向と大きさが変化し，赤道付近で北向き水平となって大きさは最も弱くなる．このように，地磁気はベクトル場の一つで，地球内部に流れる電流がその主原因であるとされている．一方，電荷は電場というもう一つのベクトル場を誘起する．

マクスウェル方程式は，ベクトル場である**電場** $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ と**磁束密度** $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ についての方程式である．磁束密度は，日常語である**磁場**を，物理的により明確に定義するために導入された概念と考えて頂きたい．マクスウェル方程式は，電場と磁場の湧き出しと渦がどのように生じるかを，数学という自然界を記述する言葉で表現しており，次の 4 本の方程式からなる．

マクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{7.5a}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \tag{7.5b}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{7.5c}$$

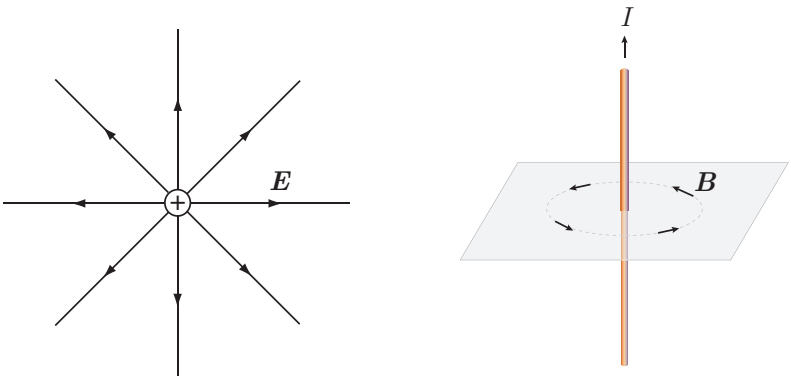
$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{7.5d}$$

ここで $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ は電荷密度，$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ は電流密度，また，ε_0，μ_0，$c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$ は定数で，その数値は以下で与える．

これらの方程式で，「div」は「湧き出し」，「rot」は「渦」と読むことができる．そして，異言語である漢文を日本語にして読む場合と同様に，異言語であるこれらの数式を，div と rot の後にレ点を入れて $\mathrm{div}\vec{E} \to \mathrm{div}_{\text{レ}}\vec{E}$，$\mathrm{rot}\vec{E} \to \mathrm{rot}_{\text{レ}}\vec{E}$ とし，日本語に翻訳できる．具体的に，(7.5a) 式は**ガウスの法則**で，「電場の湧き出しは電荷」が作ると読める．(7.5b) 式は磁場に関するガウスの法則で，「磁場の湧き出しはない」と読める．ただし，読みの単純化のため，「磁束密度」を「磁場」で置き換えた．(7.5c) 式は**ファラデーの電磁誘導の法則**で，「電場の渦は磁場の時間変化」により生じると読める．(7.5d) 式は**アンペール − マクスウェルの法則**で，「磁場の渦は電流と時間変化する電場」により生じると読める．div や rot は微分演算子で，次回，数学的に明確に定義する．

4 つの数式に関するこれらの読みは，対応する電磁現象の具体的なイメージと結びついている．図 7.4(a) は，孤立正電荷が (7.5a) 式に従って作る電場を描いたもので，電荷から電場が湧き出しているのが見て取れる．電荷は，流体力学における泉の役割を果たすのである．一方，図 7.4(b) は，直線電流が (7.5d) 式に従って作る磁束密度を描いたもので，電流 I が流れる導線のまわりに，渦磁場が形成されているのがわかる．電流は，流体力学における渦芯，すなわち台風の目や竜巻の芯のような役割を果たし，その周りに形成される磁束密度は，台風や竜巻周りの空気の流れと相似形である．

電磁現象は (7.5) 式で全て理解できる．そこでまず，(7.5) 式を音読して具体的なイメージと共に暗記し，自在に書き下せるようにしよう．四行の漢詩を覚えるのと同じ手続きを踏むのである．たった四行であるから，そんなに難しくはないであろう．定数 c は



(a) 電荷と電場　　(b) 電流と磁場

図 7.4: 孤立正電荷による電場と直線電流による磁場

光速

$$c = 2.99792458 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \tag{7.6}$$

で，マクスウェル方程式 (7.5) における唯一の本質的定数である．数値は**国際単位系**による定義値で，実用上は $3.00 \times 10^8\mathrm{m/s}$ で十分なことも多い．一方，ε_0 は**真空の誘電率**（**電気定数**），μ_0 は**真空の透磁率**（**磁気定数**）と呼ばれ，光速 c と $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ の関係がある．それらの具体的な値は

$$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{m \cdot kg/C^2} \tag{7.7a}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{s^2 \cdot C^2/(m^3 \cdot kg)} \tag{7.7b}$$

である．

7.7 ベクトル積

二つのベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ と $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ を用いて，新たなベクトルである

ベクトル積

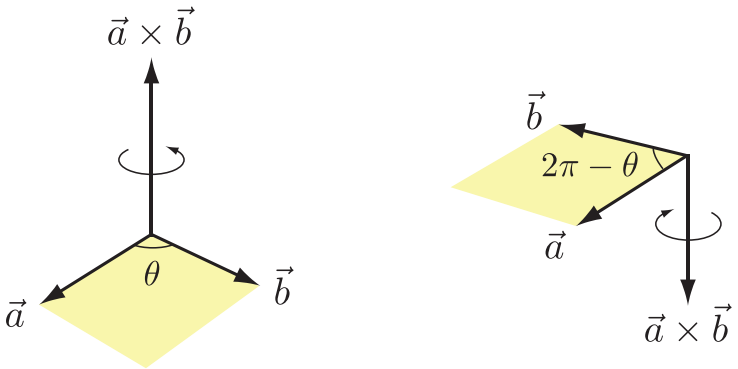
$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \tag{7.8a}$$

を定義する．ベクトル積は，外積とも呼ばれ，電磁気学で必須の数学的操作である．

ベクトル積の持つ幾何学的意味を知るには，$\vec{a}$ の方向が x 軸に一致し，$\vec{b}$ が xy 平面内にあるように座標系を選ぶとよい．実際，この特別な座標系では，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a} \times \vec{b}$ が，(7.8a) 式を用いて，

$$\vec{a} = (a, 0, 0), \quad \vec{b} = (b\cos\theta, b\sin\theta, 0), \quad \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, ab\sin\theta) \tag{7.8b}$$

と表せる．ここで θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角である．これより，(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直で，(ii) その大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が作る平行四辺形の面積 $ab|\sin\theta|$ に等しい，ということがわかる（図 7.5 参照）．特に，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行となる $\theta = 0, \pi$ の場合には，$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ となることに注意されたい．



(a) $\theta < \pi$　　(b) $\theta > \pi$

図 7.5: ベクトル積