

14 電磁波

マクスウェル方程式からは、電場と磁場の時間変化が波として伝わり、その速さが光速 $c = 3.00 \times 10^8 \text{m/s}$ に等しいという結果が得られる。マクスウェルによって得られたこの結果により、光が電磁波であることが初めて明らかになった。電磁波は、ヘルツにより実験的に発生させられて光速で伝搬することが確認され、ファラデーによって予想された電場と磁場の実在が証明された。ここでは、マクスウェル方程式から、電磁波が存在することを理論的に導く。

14.1 自由空間のマクスウェル方程式

マクスウェル方程式

$$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (13.1a)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13.1b)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (13.1c)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13.1d)$$

によると、時間変化する電荷密度 $\rho(\vec{r}, t)$ は時間変化する電場 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ の湧き出しを作り出し、時間変化する電流密度 $\vec{j}(\vec{r}, t)$ は時間変化する磁束密度 $\vec{B}(\vec{r}, t)$ の渦の源となる。ここでは、一旦作られた時間変化する電磁場が、電荷と電流のない「自由空間」をどのように伝わっていくのかを明らかにする。マクスウェル方程式で $\rho = 0$ 及び $\vec{j} = \vec{0}$ と置くと、自由空間のマクスウェル方程式

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad (14.1a)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (14.1b)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (14.1c)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (14.1d)$$

が得られる。

14.2 一方向に伝搬する電磁場の方程式

z 方向に伝搬する波の存在の可能性を探るため、方程式 (14.1) を、 \vec{E} と \vec{B} が共に (z, t) のみに依存するという簡単な場合

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_x(z, t), E_y(z, t), E_z(z, t)), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = (B_x(z, t), B_y(z, t), B_z(z, t)) \quad (14.2)$$

について考察する。ここでの目標は、この電磁場の時間変動成分が (14.7) 式のように表され、電場と磁場が垂直で、それらは「波動方程式」(14.8) に従うことを示すことである。

(14.2) 式を (14.1a) 式と (14.1c) 式に代入し、湧き出し演算子 div の定義式

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z} \quad (10.6)$$

を用いると、それぞれ

$$\frac{\partial E_z(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (14.3a)$$

$$\frac{\partial B_z(z, t)}{\partial z} = 0, \quad (14.3b)$$

が得られる。一方、(14.2) 式を (14.1b) 式に代入し、渦演算子 rot の定義式

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z}, \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y} \right) \quad (10.10)$$

を用いると、それらの x, y, z 成分からそれぞれ

$$-\frac{\partial E_y(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_x(z, t)}{\partial t}, \quad (14.3c)$$

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t}, \quad (14.3d)$$

$$0 = -\frac{\partial B_z(z, t)}{\partial t} \quad (14.3e)$$

が得られる。同様に、(14.2) 式を (14.1d) 式に代入し、渦演算子 rot の定義式 (10.10) を用いると、それらの x, y, z 成分からそれぞれ

$$-\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t}, \quad (14.3f)$$

$$\frac{\partial B_x(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y(z, t)}{\partial t}, \quad (14.3g)$$

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z(z, t)}{\partial t} \quad (14.3h)$$

が導かれる。(14.3a) 式と (14.3h) 式、および、(14.3b) 式と (14.3e) 式より、それぞれ

$$E_z(z, t) = \text{定数}, \quad B_z(z, t) = \text{定数} \quad (14.4)$$

が結論づけられる。従って、電磁場の z 成分は波ではなく、存在したとしても一様な静電磁場である。それゆえ、それらが 0 の場合を考え、以下の考察から除くことにする。

すると、電場は $\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_x(z, t), E_y(z, t), 0)$ と書くことができる。さらに、座標軸を z 軸の周りに適当に回転させることにより、

$$E_y(z, t) = 0 \quad (14.5a)$$

とできる場合を考える。この式を (14.3c) 式と (14.3g) 式に代入すると、

$$\frac{\partial B_x(z, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_x(z, t)}{\partial z} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad B_x(z, t) = \text{定数}$$

となり、 B_x も静磁場で考察から除くことができる。そこで、

$$B_x(z, t) = 0 \quad (14.5b)$$

と置くことにする。

残る有限な成分は $E_x(z, t)$ と $B_y(z, t)$ で、それらの方程式は (14.3d) と (14.3f) で与えられる。そこで、(14.3d) 式をもう一度 z で偏微分し、右辺で z 微分と t 微分の順序を入れ替え、(14.3f) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial z^2} &= -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_y(z, t)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.6a)$$

となる。同様に、(14.3f) 式をもう一度 z で偏微分し、右辺で z 微分と t 微分の順序を入れ替え、(14.3d) を代入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (14.6b)$$

が得られる。

以上をまとめると、 (z, t) のみに依存し (14.5a) とおける場合の変動電磁場は、

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_x(z, t), 0, 0), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = (0, B_y(z, t), 0), \quad (14.7)$$

と表すことができ、電場と磁場が垂直で、それらは次の方程式に従う。

$$\frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(z, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y(z, t)}{\partial t^2}. \quad (14.8)$$

電場 E_x と磁束密度 B_y に対する方程式は、同じ形をしている。この形の方程式は「波動方程式」と呼ばれる。実際、(14.8) は、速さ c で伝わる波の伝搬を記述することが以下で明らかになる。(14.8) の二つの式は独立ではなく、 E_x と B_y は (14.3d) 式と (14.3f) 式、すなわち次の関係を満たすように決めなければならない。

$$\frac{\partial B_y(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_y(z, t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t}. \quad (14.9)$$

14.3 波動方程式の解

関係式 (14.9) を満たす (14.8) 式の解は、次のように表せる。

$$E_x(z, t) = f_+(z - ct) + f_-(z + ct), \quad B_y(z, t) = \frac{f_+(z - ct) - f_-(z + ct)}{c} \quad (14.10)$$

ここで $f_{\pm}(z)$ は z について二階連続微分可能な任意の二つの関数である。添字がいささか混乱を招くかもしれないが、以下ですぐ見るように、 $z - ct$ の関数は z 軸の $+$ 方向に伝搬する波、 $z + ct$ の関数は z 軸の $-$ 方向に伝搬する波を表すので、このような添え字にした。 f_+ と f_- は二つの独立な任意の関数であることを強調しておく。

(14.10) 式の証明は以下の通りである。 $f_{\pm}(z \mp ct)$ (複合同順) は次式を満たす。

$$\frac{\partial f_{\pm}(z \mp ct)}{\partial z} = \mp \frac{1}{c} \frac{\partial f_{\pm}(z \mp ct)}{\partial t}. \quad (14.11)$$

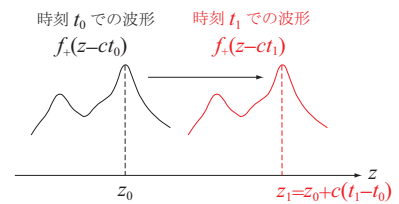
すなわち、 $z \mp ct$ の関数を z で微分することは、 t で微分して $\mp c^{-1}$ をかけることに等しい。このことと $(\mp c^{-1}) = c^{-2}$ より、次式も容易に得られる。

$$\frac{\partial^2 f_{\pm}(z \mp ct)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f_{\pm}(z \mp ct)}{\partial t^2} \quad (14.12)$$

従って、 $f_{\pm}(z \mp ct)$ の線形結合である (14.10) 式は (14.8) 式を満たす。さらに、(14.10) 式の E_x と B_y が (14.9) の関係を満たすことも、(14.11) を用いて容易に示せる。

すでに触れたように、関数 $f_{\pm}(z \mp ct)$ は、 $\pm z$ 方向に速さ c で伝搬する波を表現している。実際、 f_{\pm} の時刻 t_0 における位置 z_0 の関数値は、未来の時刻 $t_1 (> t_0)$ を用いて次のように書き換えられる。

$$f_{\pm}(z_0 \mp ct_0) = f_{\pm}(z_0 \pm c(t_1 - t_0) \mp ct_1) \quad (14.13)$$

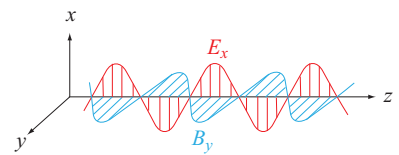


この式より、時刻 t_0 における位置 z_0 の関数値が、時刻 t_1 における位置 $z_1 \equiv z_0 \pm c(t_1 - t_0)$ の関数値に等しいことを示している。このことから、関数 $f_{\pm}(z \mp ct)$ が、 $\pm z$ 方向に速さ c で伝搬する波であることがわかった。上図には、 $f_{+}(z - ct)$ についてこの事情を描いた。

光通信では、関数 $f_{\pm}(z)$ の波形の違いを用いて情報を伝達している。我々が、波形の違いを音声を通して会話 (=情報の交換) を行っているのと同じ原理であるが、会話が音速 $\sim 340\text{m/s}$ で伝わるのに対し、光通信でははるかに高速 $\sim 3 \times 10^8\text{m/s}$ の情報伝達が可能である。

特に、

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(\omega t - kz), \quad B_y(z, t) = \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kz) \quad (14.14)$$



と表される電磁波を、単色直線偏光の平面波と呼ぶ。その波数 k (m^{-1}) は、角周波数 ω (rad/s) と光速 $c = 3.00 \times 10^8$ (m/s) を用いて

$$k = \frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (14.15)$$

と表せる。また、ここで定義した ν (s^{-1}) と λ (m) はそれぞれ振動数および波長と名づけられ、 $\omega = ck$ の関係は「分散関係」と呼ばれる。

人間の目が識別できる「可視光線」も電磁波の一種で、波長が約 $400\text{nm} = 4.0 \times 10^{-7}\text{m}$ (紫色) から 750nm (赤色) の間にある。波長が可視光よりも長く $750\text{nm} \sim 1\text{mm}$ の間にある電磁波を「赤外線」、可視光よりも短い $10\text{nm} \sim 400\text{nm}$ の領域の光を「紫外線」と呼ぶ。