13　電磁波

13.1　マクスウェル方程式

電磁場の湧き出しと渦を記述するマクスウェル方程式は，次の 4 本の方程式からなる．

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{13.1a}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \tag{13.1b}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{13.1c}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{13.1d}$$

これらの方程式で，「div」は「湧き出し」，「rot」は「渦」と読むことができる．そして，異言語である漢文を日本語にして読む場合と同様に，異言語であるこれらの数式を，div と rot の後にレ点を入れて $\mathrm{div}\vec{E} \to \mathrm{div}_{\text{レ}}\vec{E}$，$\mathrm{rot}\vec{E} \to \mathrm{rot}_{\text{レ}}\vec{E}$ とし，日本語に翻訳できる．具体的に，(13.1a) 式は**ガウスの法則**で，「電場の湧き出しは電荷」が作ると読める．(13.1b) 式は磁場に関するガウスの法則で，「磁場の湧き出しはない」と読める．ただし，読みの単純化のため，「磁束密度」を「磁場」で置き換えた．(13.1c) 式は**ファラデーの電磁誘導の法則**で，「電場の渦は磁場の時間変化」により生じると読める．(13.1d) 式は**アンペール − マクスウェルの法則**で，「磁場の渦は電流と時間変化する電場」により生じると読める．

マクスウェル方程式からは，電場と磁場の時間変化が波として伝わり，その速さが光速 $c = 3.00 \times 10^8\mathrm{m/s}$ に等しいという結果が得られる．マクスウェルによって得られたこの結果により，光が電磁波であることが初めて明らかになった．電磁波は，ヘルツにより実験的に発生させられ，ファラデーによって予想された電場と磁場の実在が証明された．ここでは，マクスウェル方程式から，電磁波が存在することを理論的に導く．

13.2　電磁波が従う方程式

(13.1) 式で $\rho = 0$ 及び $\vec{j} = \vec{0}$ と置くと，電荷・電流のない空間（自由空間）でのマクスウェル方程式

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \tag{13.2a}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{13.2b}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13.2c}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{13.2d}$$

が得られる．これらより，自由空間で振動する電磁場が，

波動方程式

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{13.3a}$$

$$\nabla^2\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{13.3b}$$

に従うことがわかる（例題 13.1）．

例題 13.1 (13.2) 式の電磁場が，波動方程式 (13.3) を満たすことを示せ．

解答 (13.2c) 式に $\mathrm{rot} \equiv \vec{\nabla}\times$ を作用させると，

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13.4}$$

が得られる．左辺は，演習問題 7[3](c) で証明した等式

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

と (13.2a) 式を用いて，

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \tag{13.5a}$$

と書き換えられる．右辺も，空間・時間微分の順序を入れ換え，その後に (13.2d) 式を用いることで，

$$-\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{13.5b}$$

と変形できる．(13.4) 式の左右に (13.5a) 式と (13.5b) 式を代入すると，(13.3a) 式が得られる．(13.2d) 式についても $\vec{\nabla}\times$ を作用させて同様の変形を行うことで，磁束密度が (13.3b) 式に従うことを示せる． ■

(13.3a) 式と (13.3b) 式は独立ではなく，(13.2c) 式と (13.2d) 式の関係で結ばれている．ここで，ベクトル積の一般的性質より，$\vec{\nabla} \times \vec{E}$ が $\vec{E}$ に垂直であることを思い起こすと，(13.2c) 式から，

- 電磁波の $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は垂直

であることが結論づけられる．また，湧き出しなしの条件である (13.2a) 式と (13.2b) 式より，

- 電磁波は横波（進行方向と垂直に振動する波）

であることもわかる．この点に関しては，以下の (13.11a) 式を参照されたい．

13.3 オイラーの公式

純虚数 $i\theta$ を肩に持つ指数関数 $e^{i\theta}$ は，三角関数 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて，

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{13.6}$$

と表せることが知られている．この三角関数と指数関数を結びつける美しい関係式を，**オイラーの公式**という．

<u>証明</u> 左辺 $f_{\mathrm{L}}(\theta) \equiv e^{i\theta}$ と右辺 $f_{\mathrm{R}}(\theta) \equiv \cos\theta + i\sin\theta$ は，同じ微分方程式

$$\frac{df_j(\theta)}{d\theta} = if_j(\theta) \qquad j = \mathrm{L}, \mathrm{R} \tag{13.7}$$

と初期条件

$$f_j(0) = 1$$

を満たす．実際，二つの関数は

$$\frac{df_{\mathrm{L}}(\theta)}{d\theta} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta} = if_{\mathrm{L}}(\theta),$$
$$\frac{df_{\mathrm{R}}(\theta)}{d\theta} = \frac{d(\cos\theta + i\sin\theta)}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta) = if_{\mathrm{R}}(\theta)$$

のように (13.7) 式を満たし，$\theta = 0$ での値も

$$f_{\mathrm{L}}(0) = e^{i0} = 1, \qquad f_{\mathrm{R}}(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

と同じである．従って，一階微分方程式の解の一意性から，$f_{\mathrm{L}}(\theta) = f_{\mathrm{R}}(\theta)$ が結論づけられる．

なお，「1 階微分方程式の解の一価性」を言い換えると，次のようになる．1 階の微分方程式を積分すると，積分定数が一つ現れる．そして，その積分定数は，初期条件を与えることで完全に決定できる．従って，初期条件を与えて得られる 1 階微分方程式の解も，ただ一つに決まるのである． ■

13.4 単色平面波とその重ね合わせ

以下では，電磁場が

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \tag{13.8a}$$
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{k}, \omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} \tag{13.8b}$$

で表される**単色平面波**を取り上げ，電磁波が伝搬していく様子を明らかにしよう．ここで，$\vec{E}_0(\vec{k}, \omega)$ と $\vec{B}_0(\vec{k}, \omega)$ は振動の振幅で，$\vec{k}$ は**波数ベクトル**，ω は**角振動数**と呼ばれる．以下では $\omega \geq 0$ の場合を考察してゆくが，$\omega < 0$ の平面波も可能で，符号の入れ換えで対応する結果が得られることを指摘しておく．

まず，単色平面波のいくつかの性質，および，単色平面波を考察する理由について概説する．単色平面波の「平面波」とは，空間・時間依存性が指数関数 $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$ で表される波を表す．また，「単色」とは単一の角振動数 ω をもつ波のことで，特に角振動数が光の領域にある場合には，単一の色を持った光の波を表す．オイラーの公式 (13.6) より，単色平面波は，余弦波と正弦波の重ね合わせであることがわかる．

以下の (13.10) 式ですぐ見るように，**波数** $k \equiv |\vec{k}|$ と角振動数 ω との間には，

$$\omega = ck$$

という**分散関係**が成立する．また，波数ベクトル $\vec{k}$ は波の伝搬方向のベクトルである．このことを見るために，$\vec{k}$ を z 軸方向に選ぶと，時刻 t における位置 z での電場は，

$$\vec{E}_0(\vec{k}, \omega)\, e^{ikz - i\omega t}$$

と表せる．この電場が微小時間 Δt（> 0）後に移動した位置 z_1 は，等式

$$kz_1 - \omega(t + \Delta t) = kz - \omega t$$

より，

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z + (\omega/k)\Delta t \\
&= z + c\Delta t
\end{aligned}
$$

と得られる．すなわち，距離 $c\Delta t$ だけ z 軸方向に光速 c で移動したことがわかる．余弦波の場合には，時刻 t における位置 z での電場の振幅 $\vec{E}_0(\vec{k},\omega)\cos(kz-\omega t)$ が，Δt 後に位置 $z_1 = z + c\Delta t$ で観測されるのである．これより，$\vec{k}$ が波の伝搬方向を向いており，波の進む速さが光速 c であることがわかる．

マクスウェル方程式では重ね合わせの原理が成立するため，より一般的な電磁波は，(13.8) 式を $(\vec{k},\omega)$ について重ね合わせた式

$$
\vec{E}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \vec{E}_0(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \tag{13.9a}
$$

$$
\vec{B}(\vec{r},t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \vec{B}_0(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} \tag{13.9b}
$$

で表すことができる．例えば余弦波 $\cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega_1 t)$ の電場を表すには，オイラーの公式 (13.6) より，$\vec{E}_0(\vec{k},\omega) = \vec{E}_0(-\vec{k},-\omega) \propto \delta^3(\vec{k}-\vec{k}_1)\delta(\omega-\omega_1)$ と選べば良い．重み $\vec{E}_0(\vec{k},\omega)$ を変えることで情報を区別できるので，(13.9a) 式は光通信の理論的基礎となっている．(13.9) 式より，構成単位である単色平面波 (13.8) の伝搬が解明できれば，その重ね合わせて多彩な電磁波を作り出せることがわかる．

13.5 単色平面波の伝搬

(13.8a) 式を (13.3a) 式に代入すると，微分演算子 $\vec{\nabla}$ と $\dfrac{\partial}{\partial t}$ が指数関数に作用してそれぞれ $i\vec{k}$ と $-i\omega$ に置き換わり，

$$
\left\{ i\vec{k}\cdot i\vec{k} - \frac{(-i\omega)^2}{c^2} \right\} \vec{E}_0(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t} = \vec{0}
$$

が得られる．この式より，有限の振幅を持つ単色平面波が，**分散関係**

$$
\omega = ck \tag{13.10}
$$

を満たすことがわかる．一方，(13.8) 式を，湧き出しなしの条件式である (13.2a) 式と (13.2b) 式に代入すると，電磁場の振動方向についての条件

$$
\vec{k}\cdot\vec{E}_0(\vec{k},\omega) = 0, \qquad \vec{k}\cdot\vec{B}_0(\vec{k},\omega) = 0 \tag{13.11a}
$$

が得られる．すなわち，電磁波は，振動電磁場が進行方向 $\vec{k}$ に垂直な**横波**である．また，(13.8) 式を (13.2c) 式に代入すると，電磁場の振幅間の関係式

$$
\vec{B}_0(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0(\vec{k},\omega) \tag{13.11b}
$$

が導かれる．すなわち，振動磁場は振動電場に垂直である．より具体的には，$(\vec{E}_0,\vec{B}_0,\vec{k})$ は右手系の基底直交ベクトルを構成し，それらに沿って (x,y,z) 座標を選ぶことができる．なお，(13.11b) 式は，(13.2c) 式の代わりに，(13.2d) 式を用いても導出できる．

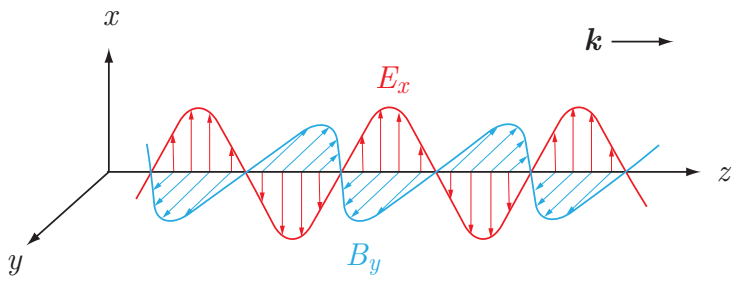

図 13.1: 直線偏光の余弦電磁波

(13.11b) 式を (13.8b) 式に代入した後，$\vec{E}_0(\vec{k},\omega) \equiv \vec{E}_{0\mathrm{r}}$ を実数に選んで (13.8) 式の実部をとると，単色余弦波

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{0\mathrm{r}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_{0\mathrm{r}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \end{cases} \tag{13.12}$$

が得られる．一方，虚部をとると，$\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ に比例する単色正弦波が得られるが，余弦波と正弦波は位相が $\pi/2$ だけ違うのみである．$\vec{k}$ と $\vec{E}$ をそれぞれ z 軸方向と x 軸方向に選び，単色余弦波のある時刻 t における伝搬の様子を描くと，図 13.1 のようになる．このように，電場がある決まった方向（図 13.1 では x 軸方向）に振動する波を，**直線偏光**という．

分散関係 (13.10) を，**振動数** $f \equiv \omega/2\pi$ と**波長** $\lambda \equiv 2\pi/k$ を用いて表すと，

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{13.13}$$

という見慣れた式になる．人間の目が識別できる**可視光線**は，波長が約 380nm$=3.8\times10^{-7}$m（紫色）から 780nm（赤色）の間にある．波長が可視光よりも長く 780nm〜1mm の間にある電磁波を**赤外線**，可視光よりも短い 10nm〜 380 nm の領域の光を**紫外線**と呼ぶ．

13.6 偏光

(13.8a) 式の振幅 $\vec{E}_0(\vec{k},\omega)$ としては，実定数ベクトル $\vec{E}_{0\mathrm{r}}$ と $\vec{E}_{0\mathrm{i}}$ の複素線型結合

$$\vec{E}_0(\vec{k},\omega) = \vec{E}_{0\mathrm{r}} + i\vec{E}_{0\mathrm{i}} \tag{13.14}$$

も可能で，この場合にも (13.11) 式はそのまま成立する．(13.11b) 式と (13.14) 式を (13.8) 式に代入して実部をとると，(13.12) 式の代わりに

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{0\mathrm{r}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) - \vec{E}_{0\mathrm{i}} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{\omega}\vec{k} \times \{\vec{E}_{0\mathrm{r}} \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) - \vec{E}_{0\mathrm{i}} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)\} \end{cases} \tag{13.15}$$

が得られる．特に，$\vec{E}_{0\mathrm{i}} = \pm(\vec{k}/k) \times \vec{E}_{0\mathrm{r}}$ と選んだ波は，**円偏光**と呼ばれている．その場合の電場は，$(\vec{k}/k)$ を z 方向に，$\vec{E}_{0\mathrm{r}}$ を x 方向に選ぶことで，

$$\vec{E}(\vec{r},t) = (E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), \mp E_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t), 0) \tag{13.16}$$

と表すことができる．この式より，円偏光では，電場の振動面が，波の伝搬方向に垂直な面内で，角速度 ω で円を描いて回転することがわかる．また，位置 $\vec{r}$ を決めた時，y 成分が $-$ 符号（$+$ 符号）の場合には，時間の経過とともに電場が反時計回り（時計回り）に回転することがわかる．これを，**左回り円偏光**（**右回り円偏光**）という．

より一般的な波は，$\vec{E}_{0\mathrm{i}}$ を，ある定数 $a \neq 0$ を用いて $\vec{E}_{0\mathrm{i}} = \pm a(\vec{k}/k) \times \vec{E}_{0\mathrm{r}}$ と表すことで得られる．その場合の電場は，(13.16) 式の y 成分が a 倍された**楕円偏光**となる．