13　マクスウェル方程式

第 11 回目に学んだ静電場を記述する二つの式

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r}) \tag{11.8}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{11.11}$$

は、マクスウェルによって、電磁場の「マクスウェル方程式」へと一般化された。その方程式は、電場とともに磁場に関しても「湧き出し密度」と「渦密度」を用いて記述され、電磁場の時間変化も記述することができる。このマクスウェル方程式を提示し、その応用例として静磁場と電磁誘導を扱う。

13.1　マクスウェル方程式

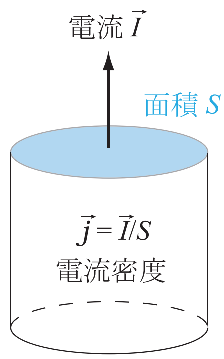
マクスウェル方程式は、場所 $\vec{r}$ と時間 t についての関数である電場 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ と磁束密度 $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ についての方程式である。「磁束密度」は、高校で物理を履修していない学生には耳慣れない言葉かもしれないが、「磁場」を物理的により明瞭に定義するために導入された概念と考えて頂きたい。マクスウェル方程式は、電場と磁場の湧き出しと渦がどのように生じるかを、「数学」という言葉で表しており、次の 4 つの方程式からなる。

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{13.1a}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13.1b}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \tag{13.1c}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{13.1d}$$



(13.1a) 式はすでに学んだ「ガウスの法則」で、(11.8) 式が時間変化のある電場と電荷密度 $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ に対しても成り立つことを示している。この式は、「電場の湧き出しは電荷」が作ると読める。(13.1b) 式は「ファラデーの電磁誘導の法則」で、静電場に対する (11.11) 式を時間変化のある磁場が存在する場合に一般化したものである。この式は、「渦電場は磁場の時間変化」により生じると読める。ただし、読みの単純化のため「磁束密度」を「磁場」で置き換えた。(13.1c) 式は磁場に関する「ガウスの法則」で、「磁場の湧き出しはない」と読める。四番目の (13.1d) 式は「アンペール–マクスウェルの法則」である。右辺の、$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$ は「電流密度」と呼ばれ、電流 $\vec{I}$ が流れている時、その流れ方向に垂直な面の単位面積当たりの電流である。定数 c と μ_0 は

$$c \equiv 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}\ \ ：光速, \qquad \mu_0 \equiv \frac{1}{c^2\varepsilon_0} = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N/A^2}\ \ ：真空の透磁率 \tag{13.2}$$

を表す。(13.1d) 式は、「渦磁場は電流と時間変化する電場」により生じると読める。右辺が電流項のみの場合は「アンペールの法則」と呼ばれる。時間変化する電場の項は、マクスウェルが「電荷の保存則」を満たすようにつけ加えた項である。

このように電場と磁場の方程式は、「湧き出し」と「渦」という我々に身近な物理量で書けている。実に美しく「神の摂理」を感じる！ 電磁場に関する現象は、これらの方程式で予言可能なのである。

マクスウェル方程式に関して二つ注釈しておく。第一に、MKSA 単位系で書かれた (13.1) 式には ε_0 と μ_0 が現れ、少々煩わしい。実際には、光速 c のみが本質的な物理パラメーターで、それを二つの定数 ε_0 と μ_0 に分割したのが MKSA 単位系である。理論物理では、ε_0 と μ_0 が現れないような単位系も頻繁に用いられている。第二に、(13.1) 式は自然界の基礎方程式であるが、金属や誘電体などの我々の身の回りの物質を実際に記述するのは不便もある。そこで、物質内の原子核に束縛された電荷や電流からの影響を物質定数 (ε, μ) に繰り込んで、方程式を簡略化することも行われている。具体的に、物質内の電磁場を表現するのに、補助場

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{：電束密度} \tag{13.3a}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} \quad \text{：磁場} \tag{13.3b}$$

を導入して束縛電荷と束縛電流の影響を繰り込み、マクスウェル方程式 (13.1) を次のように書き換える。

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho_{\mathrm{e}}, \tag{13.4a}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{13.4b}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \tag{13.4c}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}_{\mathrm{e}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{13.4d}$$

ここで ρ_{e} は導体中の自由に動ける電荷からの帯電への寄与、また、$\vec{j}_{\mathrm{e}}$ は（導体中を流れる電流のように）外から注入できる電流を表す。(13.4) 式を「現象論的マクスウェル方程式」という。

以下では、専ら (13.1) 式に基づいて議論を進める。その場合の磁場 $\vec{H}$ と磁束密度 $\vec{B}$ は、$\vec{H} = \mu_0 \vec{B}$ と定数 μ_0 が違うだけでなので、「磁束密度」と「磁場」は本質的に同じ場を表すことに注意しておく。

13.2 電流の作る磁場

(13.1d) 式で電場の時間変化がない場合の式は

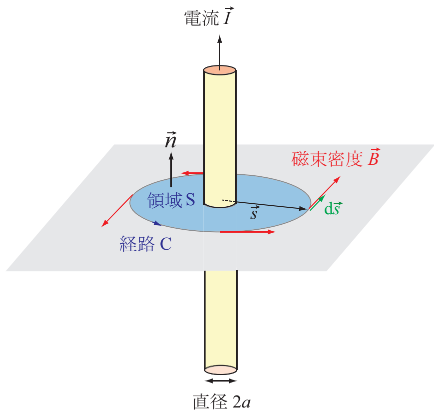
$$\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \tag{13.5}$$

となり、「アンペールの法則」と呼ばれる。この式は、電流の周りに渦状の磁場が生じることを表している。電流分布が高い対称性を持つ場合には、この式にストークスの定理

$$\int_C \vec{v}(\vec{s}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})\right] \cdot \vec{n}(\vec{r})\, \mathrm{d}S. \tag{13.6}$$

を適用して、生じる磁場を求めることができる。

例として、無限に長い直線電流が作る磁場分布を計算しよう。図のように、半径 a の無限に長い導線中を、定常で一様な電流 I が流れている状況を考え、導線の中心を z 軸に選ぶ。この場合の磁束密度は、z 軸の中心軸に対して回転対称性を持つと考えていいだろう。そこで、(13.5) 式と z 方向の単位ベクトル $\vec{n} = (0, 0, 1)$ とのスカラー積を $\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$ と取り、z 軸に垂直な面内で半径 s の円周 C によって囲まれた領域 S について、面積分を



$$\int_S \mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S. \qquad (13.7)$$

と実行する。(13.7) 式の左辺は、ストークスの定理 (13.6) を用いて次のように変形できる。

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\mathrm{d}S = \oint_C \vec{B}(\vec{s}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B(s) \int_0^{2\pi} s\mathrm{d}\theta = 2\pi s B(s). \qquad (13.8a)$$

ここで、$\vec{r}$ は領域 S 内の一般の点を、また $\vec{s}$ は S の境界の点を表す。また、(i) 経路 C 上で $\vec{B}(\vec{s})$ と $\mathrm{d}\vec{s}$ は平行であり、(ii)$\vec{B}(\vec{s}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B(s)s\mathrm{d}\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ となることを用いた。一方、(13.5) 式の右辺からの寄与は、導線内の電流密度が、大きさ $j(r) = \frac{I}{\pi a^2}$ で方向 $\vec{n}$ を持つこと、すなわち $\vec{j}(r) = \frac{I}{\pi a^2}\vec{n}$ であることに注意して、次のように計算できる。

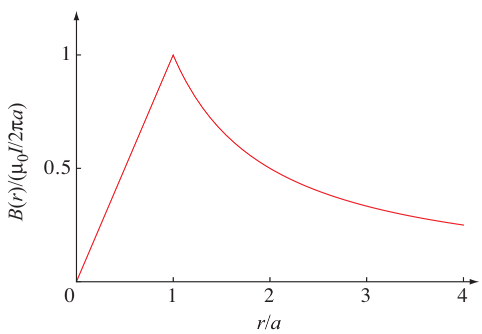
$$\mu_0 \int_S \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0 \int_S \frac{I}{\pi a^2}\vec{n} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \int_S \mathrm{d}S \qquad \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$$

$$= \begin{cases} \dfrac{s^2}{a^2}\mu_0 I & : s \le a \\ \mu_0 I & : s > a \end{cases}. \qquad (13.8b)$$

(13.8a) 式と (13.8b) 式を (13.7) 式に代入し、$s \to r$ と引数を置き換えると、z 軸から垂直方向に距離 r の点における磁束密度の大きさ $B(r)$ が、

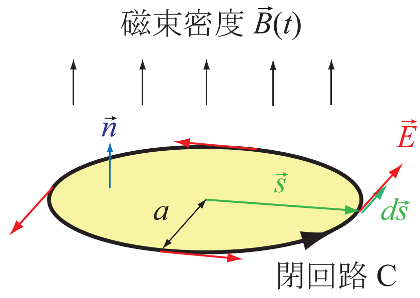
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \begin{cases} \dfrac{r}{a^2} & : r \le a \\ \dfrac{1}{r} & : r > a \end{cases}. \qquad (13.9)$$

と求まる。その方向は電流に対して右ネジ方向に渦巻き状である。右図はこの $B(r)$ を $\mu_0 I/2\pi a$ を単位として r/a の関数として描いたグラフである。



13.3 電磁誘導

13.4 時間変化する一様磁場中に置かれた円環導線中の電場



(13.1b) 式は、磁束密度の時間変化が渦電場を生じさせるという「ファラデーの電磁誘導の法則」である。この式を、空間的に一様で時間変化する磁場中に、半径 a の円環導線が磁場に垂直に置かれている系に適用し、導線内に生じる電場を求める。磁場方向の単位ベクトル $\vec{n}$ と (13.1b) 式とのスカラー積を

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{n}$$

と取る。ここで、磁束密度 $\vec{B}$ が $\vec{B}=\vec{B}(t)$ のように時間のみの関数であることを用いた。さらに、上の式を、円周 C で囲まれた平面領域 S 内で

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{13.10}$$

と面積分する。対称性から、この場合の電場は円周方向を向いて大きさは一定であると考えてよい。すると、(13.10) 式の左辺からの寄与が、ストークスの定理 (13.6) を用いて次のように計算できる。

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_C \vec{E}(\vec{s},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = E(t)\int_0^{2\pi} a\mathrm{d}\theta = 2\pi a E(t) \tag{13.11a}$$

ここで、$\vec{r}$ は領域 S 内の一般の点を、また $\vec{s}$ は S の境界の点を表す。また、(i) 円周上で $\vec{E}(\vec{s},t)$ と $\mathrm{d}\vec{s}$ は平行であり、(ii)$\vec{E}(\vec{s},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s}=E(t)a\mathrm{d}\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ となることを用いた。一方、(13.1b) 式の右辺からの寄与は、

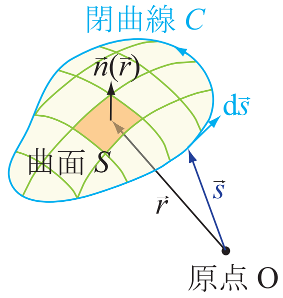
$$-\int_S \frac{\mathrm{d}\vec{B}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\int_S \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\pi a^2 \tag{13.11b}$$

と計算できる。(13.11a) 式と (13.11b) 式を (13.10) 式に代入すると、導線内に生じる電場 $E(t)$ が、

$$E(t) = -\frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} \tag{13.12}$$

と求まる。例えば $B(t)=B_0\cos\omega t$ のような振動磁場の場合には、$E(t)=\frac{1}{2}aB_0\omega\sin\omega t$ の振動電場が導線内に生じることになる。

13.5 レンツの法則と発電機の原理



(13.1b) 式からは、「発電機の原理」として知られる物理的意味が異なる現象も予言できる。右図のような空間に固定された曲面 S を考え、その曲面上で (13.1b) 式と単位法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ とのスカラー積をとると、

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}(\vec{r}) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot\vec{n}(\vec{r})$$

が得られる。さらに、この式を曲面 S 上で

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S = -\int_S \frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S \tag{13.13}$$

と面積分を行う。左辺は、ストークスの定理 (13.6) を用いて次のように変形できる。

$$\int_S \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}(\vec{r})\mathrm{d}S = \oint_C \vec{E}(\vec{s},t)\cdot\mathrm{d}\mathrm{s} \equiv \phi_{\mathrm{em}}(t). \tag{13.14a}$$

この $\phi_{\mathrm{em}}(t)$ は、閉曲線 C 内の誘導起電力という意味を持つ。一方、右辺の寄与は、曲面 S が空間に固定されていることを考慮すると、次のように書き換えられる。

$$-\int_S \frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{13.14b}$$

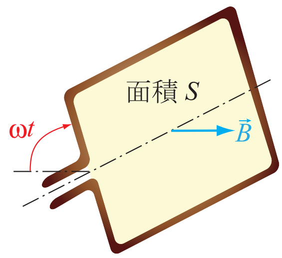
ここで

$$\Phi(t) \equiv \int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S \tag{13.15}$$

は閉曲線 C を貫く全磁束である。(13.14a) 式と (13.14b) 式を等号で結ぶと、

$$\phi_{\mathrm{em}}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} \tag{13.16}$$

となり、「回路の誘導起電力は回路を貫く全磁束の時間変化にマイナスをつけたものに等しい」という「レンツの法則」(あるいは「ノイマンの式」) が得られた。



(13.16) 式は、マクスウェル方程式を空間に固定された閉曲線 C に適用して導かれたのであるが、時間変化する回路の誘導起電力も正しく記述できることが知られている。右図のように、磁束密度 $\vec{B}$ の一様静磁場中に、面積が S の長方形型の導線を初期時刻 $t=0$ に面が磁場と平行になるように配置し、長方形の一つの中心軸の周りに角速度 ω で回転させる。回路を貫く全磁束 $\Phi(t)$ は、$\Phi(t) = BS\sin\omega t$ と時間変化する。これを (13.16) に代入すると、回路に生じる誘導起電力が、

$$\phi_{\mathrm{em}}(t) = -BS\omega\cos\omega t \tag{13.17}$$

と求まる。この結果は発電機の原理として用いられ、現代文明の礎となっている。例えば水力発電では、回路を回転させるのに水の運動エネルギーが用いられている。

なお、今考えた系では、$\vec{B}$ は時間変化せず回路も空間内で回転して時間変化する。従って、空間に固定された経路と時間変動する磁束密度に対して導かれた (13.16) 式は、この系に使えないようにも思える。実際、この系で起こっていることは、運動するコイル内の荷電粒子に働く「ローレンツ力」によって理解するのがより適切である。しかし、両者が同じ結果を与えることは、「特殊相対性理論」によって保障されている。