

## 12 ガウスの法則による静電場の計算

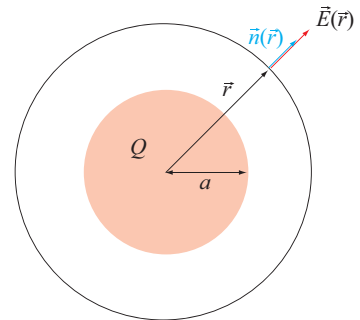
電荷分布が高い対称性を持つ場合には、ガウスの法則の積分形

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r \quad (11.7)$$

を用いて電場が容易に計算できる。以下でその例を幾つか示す。

### 12.1 半径 $a$ の球内に全電荷 $Q$ が一様に分布した場合

右図のように、半径  $a$  の球内に全電荷  $Q$  が一様に分布している場合を考える。球の中心を原点にとると、電荷分布の対称性から、この場合の電場は原点に関して回転対称性を持ち、原点から放射状に広がっているものと考えてよい。そこで、(11.7) 式の領域  $V$  として原点を中心とする半径  $r$  の球を考えると、その右辺は



$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r = \begin{cases} \frac{Q \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 a^3} & : r < a \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & : r \geq a \end{cases} \quad (12.1a)$$

と計算できる。ここで  $\frac{4}{3}\pi r^3 / (\frac{4}{3}\pi a^3)$  は、半径  $r$  と  $a$  の球の体積比である。一方、(11.7) 式の左辺では、 $\vec{E}(\vec{r}) \parallel \vec{n}(\vec{r})$  より、それらのスカラー積が  $\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = E(r)$  と球面上の点によらず一定である。従って積分が、

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r) \quad (12.1b)$$

と計算できる。ただし、 $4\pi r^2$  は半径  $r$  の球面の表面積である。(12.1a) 式と (12.1b) 式を等号で結ぶと、電場の大きさが

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{r}{a^3} & : r < a \\ \frac{1}{r^2} & : r \geq a \end{cases} \quad (12.2)$$

と求まる。

(12.2) 式の電場に対応する電位  $\phi(\vec{r})$  を、

$$\phi(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad (11.15)$$

に基づいて求めよう。基準点  $\vec{r}_0$  を無限遠点に、また、積分経路として  $r$  方向の直線経路

$$\begin{cases} \vec{s} = \vec{e}_r s \\ d\vec{s} = \vec{e}_r ds \end{cases}, \quad r \leq s \leq \infty, \quad \vec{e}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r} \quad (11.16)$$

を選び、次のように積分を変形する。

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty \vec{e}_r}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r E(s) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r ds = - \int_{\infty}^r E(s) ds \quad (12.3)$$

$r \geq a$  の時のこの積分は、(12.2) 式の下を表式を代入して

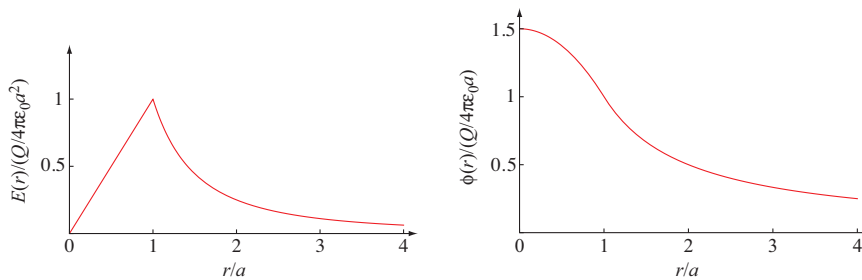
$$\phi(\vec{r}) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{ds}{s^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq a) \quad (12.4a)$$

と計算できる。一方、 $r < a$  の時は、(12.4a) 式から得られる  $\phi(\vec{e}_r a)$  の値に  $a \geq s \geq r$  の積分を加えて

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{e}_r a) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \int_a^r s ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \frac{r^2 - a^2}{2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \frac{3a^2 - r^2}{2} \quad (r < a) \quad (12.4b)$$

が得られる。このように  $\phi(\vec{r})$  は  $r$  のみの関数である。

(12.2) 式と (12.4) 式を、それぞれ  $Q/4\pi\epsilon_0 a^2$  と  $Q/4\pi\epsilon_0 a$  を単位として  $r/a$  の関数として描くと、次のようになる。



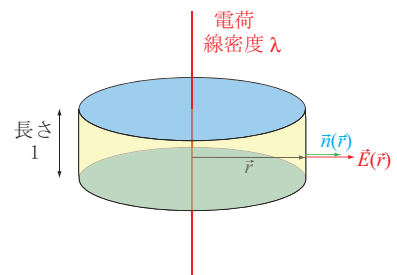
## 12.2 無限に長い直線上に電荷が一様に分布した場合

右図のように、無限に長い直線上に電荷が一様に分布した場合を考える。その直線上に  $z$  軸をとると、電荷分布の対称性から、この場合の電場は  $z$  軸に関して回転対称性を持ち、 $z$  軸周りに放射状に広がっているものと考えてよい。そこで、(11.7) 式の領域  $V$  として、 $z$  軸を中心軸とし、半径が  $r$  で  $z$  方向に長さ 1 を持つ円柱を考える。(11.7) 式の右辺は、直線上での単位長さあたりの電荷量を  $\lambda$  として、

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \quad (12.5a)$$

と計算できる。一方、(11.7) 式の左辺では、円柱の側面で  $\vec{E}(\vec{r}) \parallel \vec{n}(\vec{r})$  が成立し、それらのスカラー積が  $\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) = E(r)$  と側面の点によらず一定である一方、円柱の底面では  $\vec{E}(\vec{r}) \perp \vec{n}(\vec{r})$  で積分への寄与はゼロとなる。従って、

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS = E(r) \int_{\text{円柱側面}} dS = 2\pi r E(r) \quad (12.5b)$$



と計算できる。ただし、 $2\pi r$  は半径  $r$  の底面を持ち高さが 1 の円柱側面の表面積である。(12.5a) 式と (12.5b) 式を等号で結ぶと、電場の大きさが

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (12.6)$$

と求まる。

この電場に対しては、電位を無限遠点で 0 と選ぶことができない。しかし、2 点間  $r_0$  と  $r_1$  の間の電位の差は次のように計算できる。

$$\phi(r_1) - \phi(r_0) = - \int_{r_0}^{r_1} E(r) dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r]_{r=r_0}^{r_1} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_0} \quad (12.7)$$

ただし、 $\ln r \equiv \log_e r$  は自然対数である。

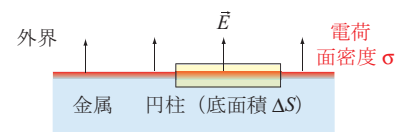
## 12.3 金属表面の電場

### 12.4 金属の帯電の性質

金属は自由に動ける荷電粒子が存在することで特徴付けられ、有限の電気抵抗を持つ。このことから、平衡状態の金属内部は正負電荷が相殺して電氣的に中性であり、帯電は表面のみに存在し得ることが結論づけられる。なぜなら、もし金属中に帯電が起これば、ガウスの法則に従って電場が発生し、自由に動ける荷電粒子が加速されて電荷の再配置に向けた非平衡状態となるからである。さらに、平衡状態における金属表面の電場は表面に垂直である。なぜなら、もし表面に平行な電場成分があれば、自由に動ける荷電粒子が加速されて電荷の再配置に向けた非平衡状態となるからである。まとめると、**平衡状態における金属の帯電は表面のみで可能で、対応する電場は外向きで表面に垂直である。**

そこで、(11.7) 式の  $V$  として、導体表面を囲み底面が導体に平行な薄い円柱を考える。対応する (11.7) 式の左辺は、

$$\begin{aligned} & \int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \\ &= \int_{\text{内側底面}+\text{外側底面}+\text{側面}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \\ &= \int_{\text{外側底面}} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) dS \\ &= E\Delta S \end{aligned} \quad (12.8)$$



と計算できる。ここで、電場が表面に垂直で外向きであることを使った。 $\Delta S$  は円柱底面の面積である。一方、(11.7) 式の右辺は、円柱導体の表面における電荷の単位面積当たりの密度 (面密度)  $\sigma$  を用いて、 $\sigma\Delta S/\epsilon_0$  と計算できる。この結果と (12.8) 式を等号で結ぶと、導体表面の外向き電場の大きさが、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (12.9)$$

と求まる。

## 12.5 半径 $a$ の金属球に全電荷 $Q$ が貯まった場合の電場

半径  $a$  の金属球内に全電荷  $Q$  が貯まった場合を考える。この場合の電荷は、金属の性質から、金属表面のみに存在する。そこで、(11.7) 式の領域  $V$  として原点を中心とする半径  $r$  の球を考えると、その右辺は

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r = \begin{cases} 0 & : r < a \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & : r \geq a \end{cases} \quad (12.10)$$

と計算できる。一方、(11.7) 式の左辺は、(12.1b) のように計算できる。(12.10) 式と (12.1b) 式を等号で結ぶと、電場の大きさが

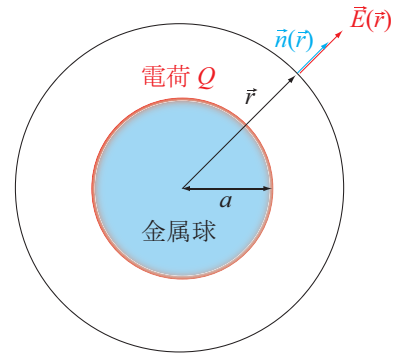
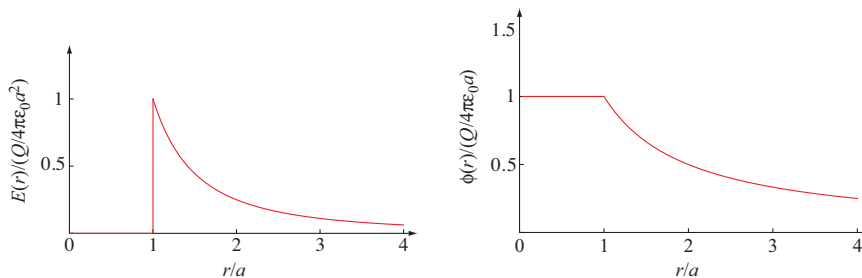
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} 0 & : r < a \\ \frac{1}{r^2} & : r \geq a \end{cases} \quad (12.11)$$

と求まる。対応する電位  $\phi(\vec{r})$  は、(12.4) 式の導出と同様の計算により、

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} \frac{1}{a} & r < a \\ \frac{1}{r} & r \geq a \end{cases} \quad (12.12)$$

と求まる。このように、金属球内では帯電がないことから、電位は一定値をとる。

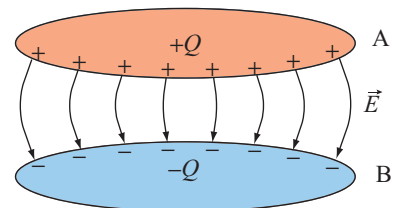
(12.11) 式と (12.12) 式を、それぞれ  $Q/4\pi\epsilon_0 a^2$  と  $Q/4\pi\epsilon_0 a$  を単位として  $r/a$  の関数として描くと、次のようになる。



## 12.6 コンデンサー

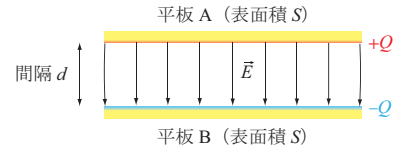
二つの導体を絶縁して向かい合わせ、電圧を加えて電荷を貯めるようにしたものを「コンデンサー（蓄電器）」という。右図のように、導体 A と B にそれぞれ電荷  $Q > 0$  と  $-Q$  を蓄えると、導体 A から導体 B に向けて電場ができる。導体の電位は一定なので、導体 AB 間の電位差  $\phi(A) - \phi(B)$  が定義できる。電荷量  $Q$  をこの電位差  $\phi(A) - \phi(B)$  で割った量

$$C \equiv \frac{Q}{\phi(A) - \phi(B)} \quad (12.13)$$



は、「コンデンサーの電位を1V上げるのに必要な電荷量」という意味を持ち、「静電容量」と呼ばれている。電位差と静電容量の単位の単位として、それぞれV（ボルト）とF（ファラッド）を新たに導入する。1F = 1C/Vである。

例として、表面積  $S$  の金属平板2枚を距離  $d$  だけ隔てて平行に配置した「平行板コンデンサー」の静電容量を求めよう。一方に電荷  $Q$ 、もう一方に電荷  $-Q$  を貯めると、電場が存在する空間をなるべく小さくするため、電荷は向かい合った表面にたまる。その結果生じる電場は、平板に垂直方向で平板間のみが存在すると見なせる。 $+Q$  がたまった金属平板の表面電荷密度は、 $\sigma = Q/S$  である。従って、生じる電場の大きさは、(12.9) 式より、



$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \quad (12.14)$$

と求まる。これと  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  の関係より、平板間の電位差  $\phi(A) - \phi(B)$  が、平行板に垂直方向電場を積分して

$$\phi(A) - \phi(B) = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} \quad (12.15)$$

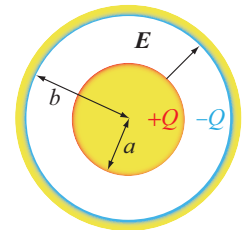
と計算できる。この式を (12.13) に代入すると、平行板コンデンサーの静電容量が、

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (12.16)$$

と得られる。

もう一つの例として、半径  $a$  の導体球 A を、内径が  $b$  の導体球殻 B で包み、内側に電荷  $Q$ 、外側に電荷  $-Q$  を与える。導体球の中心を原点とする半径  $r$  の球を考えると、球内の総電荷は、(12.10) と同様の考察により、

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & : a \leq r \leq b \\ 0 & : r < a, b < r \end{cases} \quad (12.17)$$



と求まる。一方、(11.7) 式の左辺は、(12.1b) 式のように計算できる。(12.17) 式と (12.1b) 式を等号で結ぶと、電場の大きさが

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & : a \leq r \leq b \\ 0 & : r < a, b < r \end{cases} \quad (12.18)$$

と求まる。A と B の電位差は、 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  式より、(12.18) に  $-1$  をかけて  $r = b$  から  $r = a$  まで積分することにより、

$$\phi(a) - \phi(b) = - \int_b^a E(r) dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{r=b}^a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (12.19)$$

と得られる。この結果を (12.13) 式に代入すると、静電容量が

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b - a} \quad (12.20)$$

と求まる。