# 11　金属の帯電と電場

## 11.1　金属の帯電の特徴

金属は，自由電子が存在することで特徴づけられる．このことから，平衡状態の金属内部では，正負電荷が相殺されて電気的に中性であり，帯電は，金属表面のみで起こりうることが結論できる．なぜなら，もし金属中に帯電が生じれば，ガウスの法則に従って電場が発生し，自由電子が加速されて，電荷の再配置に向けた非平衡状態となるからである．さらに，平衡状態における金属表面の電場は，表面に垂直である．なぜなら，もし表面に平行な電場成分があれば，自由電子が加速されて，電荷の再配置に向けた非平衡状態となるからである．まとめると，平衡状態において，金属の帯電は表面のみで可能で，電場は金属の外部のみに存在し，金属表面に垂直である．また，電場

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \tag{10.17}$$

が金属内でゼロとなるのであるから，金属では静電ポテンシャル $\phi$ が一定値を持つこともわかる．

そこで，ガウスの法則の積分形

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,d^3r \tag{10.2}$$

における領域 $V$ として，図 11.1 のように，導体表面を囲み底面が導体表面に平行な薄い円柱を考える．対応する (10.2) 式の左辺は，

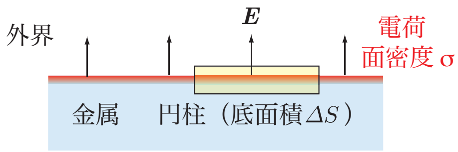

図 11.1:

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\text{内側底面 + 外側底面 + 側面}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\text{外側底面}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = E\Delta S \tag{11.1}$$

と計算できる．ここで，電場が表面に垂直で金属外部のみで有限であることを使った．$\Delta S$ は円柱底面の面積である．一方，(10.2) 式の右辺は，導体表面における単位面積当たりの電荷密度（面密度）$\sigma$ を用いて，$\sigma\Delta S/\varepsilon_0$ と表せる．この結果と (11.1) 式を等号で結ぶと，導体のすぐ外側での電場の大きさが，次のように求まる．

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{11.2}$$

## 11.2　半径 $a$ の金属球に全電荷 $Q$ が貯まった場合の電場

半径 $a$ の金属球内に全電荷 $Q$ が貯まった場合を考える．この場合の電荷は，金属の性質から，金属表面のみに存在する．そこで，(10.2) 式の領域 $V$ として原点を中心とする半径 $r$ の球を考えると，その右辺は

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\,d^3r = \begin{cases} 0 & : r < a \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & : r \geq a \end{cases} \tag{11.3}$$

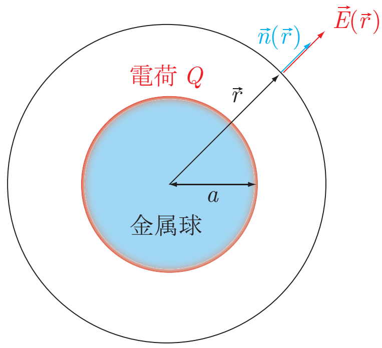

図 11.2:

と計算できる．一方，(10.2) 式の左辺は，容易に

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = E\int_S dS = 4\pi r^2 E \tag{10.5a}$$

と得られる（例題 10.1）．(11.3) 式と (10.5a) 式を等号で結ぶと，電場の大きさが

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\times\begin{cases} 0 & : r < a \\ \dfrac{1}{r^2} & : r \geq a \end{cases} \tag{11.4}$$

と求まる．対応する電位 $\phi(\vec{r})$ は，演習問題 10.2 と同様の計算により，

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\times\begin{cases} \dfrac{1}{a} & r < a \\ \dfrac{1}{r} & r \geq a \end{cases} \tag{11.5}$$

と得られる．このように，金属球内では帯電がないことから，電位は一定値をとる．

(11.4) 式と (11.5) 式を，それぞれ $Q/4\pi\varepsilon_0 a^2$ と $Q/4\pi\varepsilon_0 a$ を単位として $r/a$ の関数として描くと，図 11.3 のようになる．

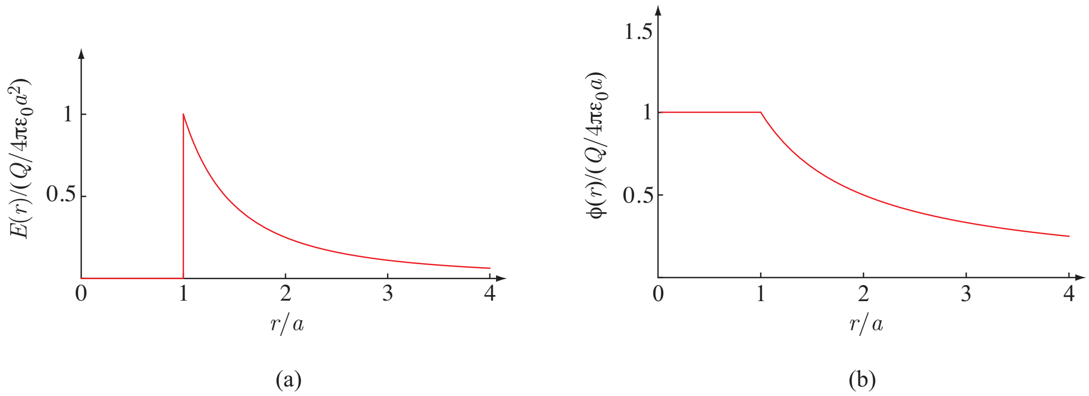


図 11.3: (a) 電場の大きさの $r$ 依存性．(b) 静電ポテンシャルの $r$ 依存性

## 11.3　コンデンサ

二つの金属を絶縁して向かい合わせ，電圧を加えて電荷を貯めるようにしたものを，**コンデンサ**（蓄電器）という．図 11.4 のように，金属 A と B にそれぞれ電荷 $Q > 0$ と $-Q$ を与えると，金属表面に帯電が生じ，導体 A から導体 B に向けて電場ができる．導体の電位は一定なので，導体 AB 間の電位差 $\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})$ が定義できる．電荷量 $Q$ をこの電位差 $\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})$ で割った量

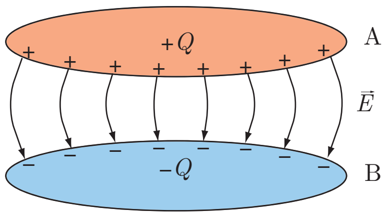


図 11.4: コンデンサ

$$C \equiv \frac{Q}{\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})} \tag{11.6}$$

は，「電位差 1V 当りコンデンサに蓄えることのできる電荷量」という意味を持ち，**静電容量**と呼ばれている．静電容量の単位として，新たに F（ファラッド）を導入する．1F = 1C/V である．

金属表面の正確な表面電荷分布と対応する電場は，微分方程式であるガウスの法則

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

を，「電場が金属表面に垂直である」という条件で数値的に解くことで得られる．しかし，その大まかな電荷分布は，「$\vec{E}$ の有限な領域をなるべく小さくするように電荷が表面に分布する」という条件から求められる．これより，電荷は向かい合った金属の内側表面に集積し，コンデンサ内に集中する電場分布を作りだすことが結論づけられる．外側表面の帯電はほぼ無視できるのである．

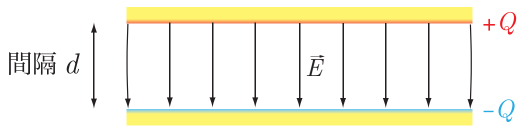

図 11.5: 平行板コンデンサ

例として，図 11.5 のように，表面積 $S$ の金属平板 2 枚を，距離 $d$ だけ隔てて平行に配置した平行板コンデンサの静電容量を求めよう．一方に電荷 $Q$，もう一方に電荷 $-Q$ を貯めると，電場が存在する空間をなるべく小さくするため，電荷のほとんどは向かい合った表面にたまる．その結果生じる電場は，非常に良い精度で，平板に垂直で平板間のみに存在すると見なせる．電荷 $+Q$ がたまった金属板の表面電荷密度は $\sigma = Q/S$ である．従って，生じる電場の大きさは，(11.2) 式より，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \tag{11.7}$$

と求まる．これと $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ の関係より，平板間の電位差 $\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B})$ が，平行板に垂直方向に電場を積分して

$$\phi(\mathrm{A}) - \phi(\mathrm{B}) = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \tag{11.8}$$

と計算できる．この式を (11.6) 式に代入すると，平行板コンデンサの静電容量が，

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \tag{11.9}$$

と得られる．

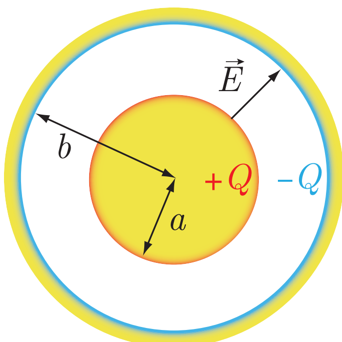

図 11.6: 球状コンデンサ

もう一つの例として，図 11.6 のように，半径 $a$ の導体球 A を，内径が $b$ の導体球殻 B で包み，内側に電荷 $Q$，外側に電荷 $-Q$ を与える．導体球の中心を原点とする半径 $r$ の球を考えると，球内の総電荷は，(11.3) と同様の考察により，

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r})\, d^3r = \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & : a \le r \le b \\ 0 & : r < a,\ b < r \end{cases} \tag{11.10}$$

と求まる．一方，(10.2) 式の左辺は，容易に

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = E \int_S dS = 4\pi r^2 E \tag{10.5a}$$

と積分できる（例題 10.1）．(11.10) 式と (10.5a) 式を等号で結ぶと，電場の大きさが

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & : a \le r \le b \\ 0 & : r < a,\ b < r \end{cases} \tag{11.11}$$

と求まる．A と B の電位差は，$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ 式より，(11.11) に $-1$ をかけて $r = b$ から $r = a$ まで積分することにより，

$$\phi(a) - \phi(b) = -\int_b^a E(r)\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r=b}^{a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{11.12}$$

と得られる．この結果を (11.6) 式に代入すると，静電容量が

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a} \tag{11.13}$$

と求まる．