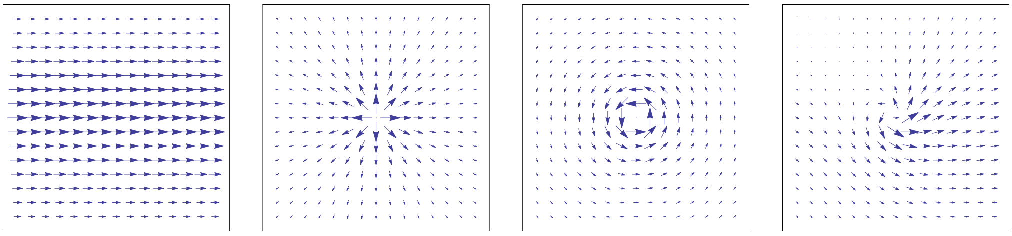
10　ガウスの定理とストークスの定理

「電磁気学」は、空気や水の流れを記述する「流体力学」と類似した構造を持っており、同じ数学で記述可能である。水や空気の流れを決めるのに重要な要素として、泉や水道の蛇口などからの「湧き出し」と、台風や竜巻などの「渦」がある。そして、電磁気学でも「湧き出し」と「渦」の概念が有用である。具体的には、電場は電荷から湧き出し、磁場は電流の周りで渦を巻くように作られる。

ここでは、電磁気学を学ぶ準備として、「湧き出し密度」と「渦密度」を数学的に定義するのに用いられる二つの定理、すなわち「ガウスの定理」（湧き出し定理）と「ストークスの定理」（渦定理）を提示し、それらを証明する。この章の主な結果は、湧き出しに関する (10.5) 式と (10.6) 式、渦に関する (10.9) 式と (10.10) 式である。

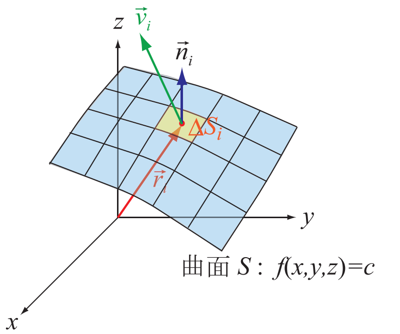
10.1　ベクトル場と湧き出し・渦

電磁気学は「ベクトル場」を用いて記述される。「ベクトル場」の身近な例として、川の水の流れや地球上の大気の流れ、海水の循環などを表現する「速度場」$\vec{v}(\vec{r}) = (v_x(\vec{r}), v_y(\vec{r}), v_z(\vec{r}))$ が挙げられる。下図は速度場の三つの例である。左端の図は一方向に進む流れで、上下端で速さの減衰が見られる。一方、左から二番目の図では湧き出しが、三番目の図では渦があるのがはっきりと確認できる。これら三つの速度場を重ね合わせると右端の図が出来上がる。この右端の図では、渦は目で確認できるものの、湧き出しの存在はやや不明瞭になっている。「湧き出し」と「渦」を「ベクトル場」$\vec{v}(\vec{r})$ を用いて数学的に明確に定義するのがこの章での目的である。



10.2　面積分

まず、ベクトル場の面積分を定義しよう。右図のように、曲面 S を N 個の微小な長方形に分割し、各曲面の中心における位置ベクトルを $\vec{r}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$、曲面に垂直な単位ベクトル（＝単位法線ベクトル）を $\vec{n}_i \equiv \vec{n}(\vec{r}_i)$、微小曲面 i の面積を ΔS_i とする。そして、ベクトル場 $\vec{v}(\vec{r})$ の曲面 S 上での面積分を、分割数 N を無限に大きくする（＝各微小曲面を無限に小さくする）極限を用いて、次のように定義する。



$\vec{r}_i$: • の位置ベクトル
$\vec{n}_i = \vec{n}(\vec{r}_i)$: 曲面の単位法線ベクトル
$\vec{v}_i = \vec{v}(\vec{r}_i)$: 曲面上のベクトル場
ΔS_i　: 微小曲面 i の面積

面積分 (surface integral)

$$\int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \mathrm{d}S \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{v}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}(\vec{r}_i) \Delta S_i. \quad (10.1)$$

定義式の具体的なイメージをつかむには、川の中に水分子が通過できる膜を張った状況を考え、$\vec{v}(\vec{r})$ として（密度が一定であるような）川の水の流れの場を思い浮かべれば良い。$\vec{v}(\vec{r})$ と単位法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ とのスカラー積をとって面積分する (10.1) の計算により、膜を通して毎秒流れる水量がわかる。

曲面 S 上の単位法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ はどのように構成すれば良いのであろうか。三次元空間での曲面は、数学の言葉で表すと「二次元の多様体」であり、$\vec{r} \equiv (x, y, z)$ の間に一つの関係式を持ち込むことで構成できる。曲面 S が、方程式

$$f(\vec{r}) = c \tag{10.2}$$

で記述できるとしよう。ただし c は定数である。さて、空間を $\vec{r} \to \vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$ と移動した時の $f(\vec{r})$ の変化は、演算子ナブラ

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{10.3}$$

を用いて

$$\mathrm{d}f(\vec{r}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \qquad \vec{\nabla} f(\vec{r}) \equiv \mathrm{grad}\, f(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\right) \tag{10.4}$$

と表せる。特に、曲面 S 上での移動 $\mathrm{d}\vec{r}$ を考えると、(10.2) 式右辺の値が一定であることから f の変化はなく、$\mathrm{d}f(\vec{r}) = 0$ が成立する。これより、曲面 S 上での変化 $\mathrm{d}\vec{r}$ に対して $\mathrm{grad}\, f(\vec{r}) \perp \mathrm{d}\vec{r}$ が成立すること、すなわち、「$\mathrm{grad}\, f(\vec{r})$ は曲面 S に垂直である」ことがわかる。従って、$\mathrm{grad}\, f(\vec{r})/|\mathrm{grad}\, f(\vec{r})|$ を作れば、上向きあるいは下向きいずれかの単位法線ベクトルとなる。

10.3 ガウスの定理（湧き出し定理）

数学の定理である「ガウスの定理」は、水の流れを表す速度場 $\vec{v}(\vec{r})$ を例にとって考えるのが最も理解しやすいであろう。（水分子が自由に通過できる）閉曲面 S で囲まれた空間の中に、湧き出しがあるかどうかを見るためには、その閉曲面を通って毎秒流れ出る水量を計算すれば良い。それを与えるのが次式の左辺で、$\vec{n}(\vec{r})$ は閉曲面 S 上の点 $\vec{r}$ における外向き単位法線ベクトルである。「ガウスの定理」は、表面 S を毎秒出て行く水量が、右辺のように、領域 S で囲まれた体積 V の中での $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ の体積積分に変換できることを表している。

ガウスの定理

$$\int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \mathrm{d}S = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r. \tag{10.5}$$

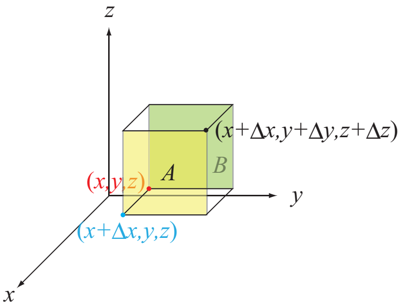
ここで、$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \equiv \mathrm{div}\, \vec{v}$ はベクトル場 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ の発散 (divergence) と呼ばれ、次式で定義されている。

湧き出し密度

$$\mathrm{div}\, \vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z}. \tag{10.6}$$

(10.5) 式の意味を考えると、この $\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{r})$ は、点 $\vec{r}$ における湧き出し密度の定義式と見なせることがわかる。この定義では、排水溝のような「吸い込み口」は「負の湧き出し口」と見なせる。

証明は二段階で行える。まず、微小な直方体について証明する。図の黄色面 (A 面) および薄緑面 (B 面) での単位法線ベクトルは、それぞれ $\vec{n}=(1,0,0)$ と $\vec{n}=(-1,0,0)$ であり、それらの面の面積は共に $\Delta S=\Delta y\Delta z$ と表せる。したがって、この二つの面からの (10.5) 左辺への寄与は、次のように計算できる。



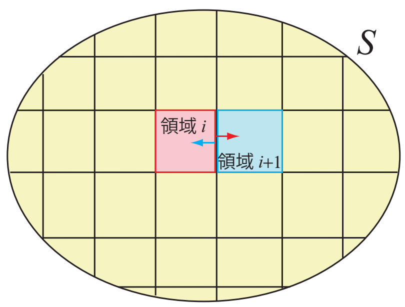
$$\int_{A+B}\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\mathrm{d}S\approx\left[v_x(x+\Delta x,y,z)-v_x(x,y,z)\right]\Delta y\Delta z$$
$$\approx\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x}\Delta^3 r. \tag{10.7}$$

ただし、$\Delta^3 r\equiv\Delta x\Delta y\Delta z$ は直方体の体積である。y 軸に垂直な二つの面と z 軸に垂直な二つの面からの寄与も同様に計算できるので、次式を得る。

$$\int_S\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\mathrm{d}S\approx\left[\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x}+\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y}+\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z}\right]\Delta^3 r\approx\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}^3r. \tag{10.8}$$

この式は、$\Delta^3 r\to 0$ の極限で正確に成立する。

次に、曲面 S で囲まれた有限の領域を、微小な直方体に分割して考察する。すると、隣り合う微小な直方体の共有面からの $\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})$ への寄与は、$\vec{n}$ が逆向きであることから相殺することがわかる（右図は断面図）。従って、次式が近似的に成立する。



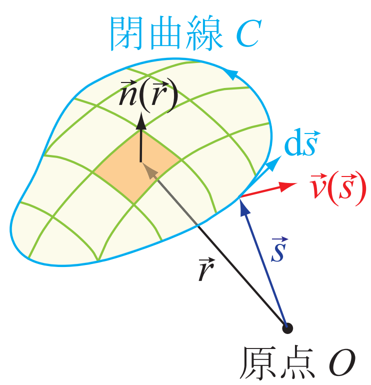
$$\int_S\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S\approx\sum_i\int_{S_i}\vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S$$
$$\approx\sum_i\int_{V_i}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r\approx\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r.$$

この式は、分割数が無限大の極限で正確に成立するので、(10.5) が証明できたことになる。

(10.5) 式によると、空間の点 $\vec{r}$ における湧き出しの強さは、(10.6) で定義された $\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{r})$ で与えられることになる。

10.4　ストークスの定理（渦定理）

数学の定理である「ストークスの定理」も、水や空気の流れを表す速度場 $\vec{v}(\vec{r})$ を例にとって考えるのが最も理解しやすいであろう。曲線 C の内側に渦中心があるかどうか、およびその強度を調べるには、C に回る向きを与え、C 上で速度場 $\vec{v}(\vec{r})$ を線積分すれば良い。これが次式の左辺で、「ストークスの定理」は、そのように直感的に定義された C 内の渦強度が、右辺のように、曲線 C で囲まれた表面 S 上での $\vec{\nabla}\times\vec{v}$ と右ネジ方向単位法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ のスカラー積の面積分に変換できることを表している。



ストークスの定理

$$\int_C \vec{v}(\vec{s})\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_S \left[\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r})\right]\cdot\vec{n}(\vec{r})\,\mathrm{d}S. \tag{10.9}$$

ここで、$\vec{\nabla}\times\vec{v}\equiv \mathrm{rot}\,\vec{v}$ はベクトル場 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ の回転 (rotation) あるいは渦 (curl) と呼ばれ、ナブラ演算子 (10.3) を用いて次式で定義されている。

渦密度

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r})\equiv\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r})\equiv\left(\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z},\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x},\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}\right). \tag{10.10}$$

(10.9) 式の意味を考えると、この $\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r})$ は、点 $\vec{r}$ における渦密度の定義式と見なせることがわかる。

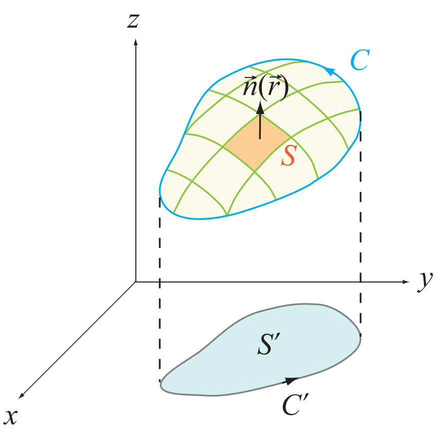
(10.9) 式で $\vec{v}(\vec{r})\to(u_x(x,y),u_y(x,y),0)$ と置き、曲面 S を xy 面上の閉領域 S' で置き換えると、$\vec{n}(\vec{r})=(0,0,1)$ となり、(10.9) 式は二次元領域におけるグリーンの定理

$$\int_{C'}\left[u_x(x,y)\mathrm{d}x+u_y(x,y)\mathrm{d}y\right]=\int_{S'}\left[\frac{\partial u_y(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}S' \tag{10.11}$$

に還元される。従って、ストークスの定理は、グリーンの定理の三次元版であると見なせる。また、(10.9) 式で v_x のみが有限である場合を考えると、

$$\int_C v_x(\vec{r})\mathrm{d}x=\int_S\left[\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}n_y(\vec{r})-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}n_z(\vec{r})\right]\mathrm{d}S \tag{10.12}$$

が成立することもわかる。



証明は、グリーンの定理 (10.11) を既知として、(10.12) 式について行う。何故なら、同様の証明が v_y あるいは v_z のみが有限である場合にも実行でき、(10.9) はそれら三つの式を足し合わせることで得られるからである。具体的に、グリーンの定理 (10.11) で $u_y(x,y)=0$ の場合には、

$$\int_{C'}u_x(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{S'}\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}S' \tag{10.13}$$

が成立する。一方、曲面 S が方程式 $z=f(x,y)$ で表せるものとすると、S 上での速度場 $v_x(\vec{r})$ は、$v_x(x,y,f(x,y))$ と表せる。この (x,y) のみの関数を、新たに

$$u_x(x,y)\equiv v_x(x,y,f(x,y)) \tag{10.14a}$$

と置くことにする。(10.14) 式の y に関する偏微分は、微分の連鎖律を用いて、

$$\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v_x(x,y,f(x,y))}{\partial y}=\left[\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{z=f(x,y)} \tag{10.14b}$$

と表せる。(10.13) 式の両辺に (10.14) 式を代入すると、

$$\int_{C'} v_x(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x = -\int_{S'}\left[\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{z=f(x,y)}\mathrm{d}S' \qquad (10.15)$$

となる。さらに

$$\int_{C'} v_x(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x = \int_C v_x(x,y,z)\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}S' = n_z(\vec{r})\mathrm{d}S \qquad (10.16)$$

に注意すると、(10.15) 式は

$$\int_C v_x(x,y,z)\mathrm{d}x = -\int_S\left[\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y}n_z(\vec{r})+\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}n_z(\vec{r})\right]\mathrm{d}S \qquad (10.17)$$

へと書き換えられる。一方、曲面 S の方程式は $f(x,y)-z=0$ で与えられるので、その曲面上での単位法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ は、勾配 $\mathrm{grad}\,[f(x,y)-z]$ に比例することになる。つまり、

$$\vec{n}(\vec{r}) \propto \mathrm{grad}\,[f(x,y)-z] = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y},-1\right) \qquad (10.18)$$

すなわち $n_y : n_z = \partial f(x,y)/\partial y : -1$ が成立する。これより、

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}n_z(\vec{r}) = -n_y(\vec{r}) \qquad (10.19)$$

が得られる。この関係を (10.17) 式に代入すると、(10.12) 式が得られる。証明終。