

10 ガウスの法則による静電場の計算

10.1 マクスウェル方程式

電磁場の湧き出しと渦を記述するマクスウェル方程式は、次の4本の方程式からなる。

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (10.1)$$

10.2 球対称な電荷分布が作る静電場

以下では、静的な電荷分布が作り出す電場（静電場）を、重ね合わせの原理も用いて考察する。この場合には、(10.1) 式の一番目の式、すなわち、電場に関するガウスの法則

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (7.5a)$$

が、他の3式と切り離されて独立した方程式となり、それを解く（積分する）ことで静電場が求まる。

(7.5a) 式を、任意の有限領域 V で

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d^3r$$

と体積積分した後、左辺をガウスの定理 (9.1) を用いて表面積分に書き換えると、

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d^3r \quad (10.2)$$

が得られる。ここで、 S は領域 V の表面を表し、 \vec{n} は S 上の外向き単位法線ベクトルである。電荷分布の対称性が高い場合には、この式を用いて静電場が計算できる。

図 10.1 のように、原点を中心とする半径 a の球内に、総量 Q の電荷が一様に分布している場合の電場を求めよう。電荷密度は

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)^{-1} Q & : r \leq a \\ 0 & : r > a \end{cases} \quad (10.3)$$

と表せる。ただし、球の体積に関する (8.17c) 式を用いた。この電荷分布は、原点からの距離 $r \equiv |\vec{r}|$ のみに依存し、球対称である。従って、作り出される電場も球対称かつ放射状に湧き出すと結論できる。そこで、

(10.2) 式の領域 V として、図 10.1 のような原点を中心とする半径 r の球を採用し、両辺の積分を行う。すると、原点から距離 r の点での電場の大きさが、

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \begin{cases} (r/a)^3 & : r \leq a \\ 1 & : r > a \end{cases} \quad (10.4)$$

と得られる（例題 10.1）。

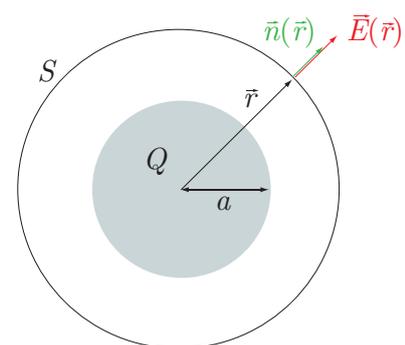


図 10.1:

例題 10.1 (10.4) 式を導出せよ。

解答 半径 r の球面上での電場は面に垂直で、外向き単位法線ベクトル $\vec{n} = \vec{r}/r$ と平行になり、 $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$ が成立する。さらに、その大きさ E が球面上で同じ値を持つことに注意すると、(10.2) 式左辺の積分が、

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E \int_S dS = 4\pi r^2 E \quad (10.5a)$$

と計算できる。ただし、球の表面積に関する (8.17b) 式を用いた。一方、(10.2) 式右辺は、(10.3) 式を代入して

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d^3r = \frac{Q}{\varepsilon_0} \times \begin{cases} (r/a)^3 & : r \leq a \\ 1 & : r > a \end{cases} \quad (10.5b)$$

と求まる。ここで、 $r \leq a$ の場合の因子 $(r/a)^3$ は、領域 V と半径 a の球の体積比である。(10.5a) 式と (10.5b) 式を等号で結ぶと、(10.4) 式が得られる。 ■

電場の方向が放射状であることを考慮し、(10.4) 式に外向き単位法線ベクトル $\vec{n} = \vec{r}/r$ をかけると、方向まで含めた電場が、

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \times \begin{cases} (r/a)^3 & : r \leq a \\ 1 & : r > a \end{cases} \quad (10.6)$$

と書き下せる。ただし、ベクトル場としての電場には方向依存性があることを考慮して、引数を r から \vec{r} へと変更した。この式より、 $Q > 0$ の場合には電場が帯電した球から湧き出し、 $Q < 0$ の場合には球へと引き込まれることがわかる。

10.3 点電荷が作る静電場

(10.6) 式で $a \rightarrow 0$ の極限をとると、原点に大きさ Q の点電荷がある場合の電場の式

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad (10.7)$$

が得られる。対応する電荷分布は、(10.3) 式を Q で割った関数

$$\delta^3(\vec{r}, a) = \begin{cases} \left(\frac{4\pi}{3}a^3\right)^{-1} & : r \leq a \\ 0 & : r > a \end{cases} \quad (10.8)$$

から得られる極限関数、すなわち、ディラックのデルタ関数

$$\delta^3(\vec{r}) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \delta^3(\vec{r}, a) \quad (10.9)$$

を用いて、

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta^3(\vec{r}) \quad (10.10)$$

と表すことができる.

デルタ関数は, 等式

$$\int_{\text{全空間}} \delta^3(\vec{r}) d^3r = 1, \quad \int_{\text{全空間}} f(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = f(\vec{r}_0) \quad (10.11)$$

を満たす. ただし, $f(\vec{r})$ は任意の滑らかな関数である. 第一式は, (10.8) 式を全空間で積分することで示せる. 第二式は, $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ が $\vec{r} = \vec{r}_0$ のみで有限であることを考慮し, $f(\vec{r})$ を $f(\vec{r}_0)$ で置き換えて積分の外に出し, 第一式を用いることで証明できる.

点電荷が, 原点ではなく, 位置 \vec{r}_1 にある場合には, (10.7) 式と (10.10) 式を, それぞれ

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (10.12a)$$

$$\rho(\vec{r}) = Q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (10.12b)$$

に変更すれば良い.

10.4 重ね合わせの原理

マクスウェル方程式 (10.1) には次の重要な性質がある.

重ね合わせの原理

二つの電荷・電流密度が同時に存在する場合 ($\rho_1 + \rho_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2$) にできる電磁場は, それぞれの電荷・電流分布 (ρ_i, \vec{j}_i) ($i = 1, 2$) が単独で作る電磁場 (\vec{E}_i, \vec{B}_i) を足し合わせたもの, すなわち, ($\vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{B}_1 + \vec{B}_2$) に等しい.

重ね合わせの原理が成り立つことは, (10.1) 式に基づいて, 数学的に証明できる. 具体的に, (10.1) 式に添字 1, 2 をつけたものを一対用意する. 第一式についてこれを行うと,

$$\text{div} \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_1, \quad \text{div} \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_2$$

となる. 次に, 二つの方程式を辺々足し合わせ, 変形する. 上の二式に関してこの操作を実行すると, 次のようになる.

$$\text{div} \vec{E}_1 + \text{div} \vec{E}_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_1 + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_2 \quad \longleftrightarrow \quad \text{div}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_1 + \rho_2).$$

ここで, 微分演算子 div に関して分配則 $\text{div} \vec{E}_1 + \text{div} \vec{E}_2 = \text{div}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ が成り立つことを用いた. 他の式に関しても, 微分演算子 rot と $\frac{\partial}{\partial t}$ について分配則が成り立つので, 同様な変形が可能である. 以上より, マクスウェル方程式について, 重ね合わせの原理が成り立つことが明らかとなった. この性質は, マクスウェル方程式が ($\vec{E}, \vec{B}, \rho, \vec{j}$) の一次式であること, すなわち線形方程式であることに由来し, 応用上も非常に重要な意味を持つ. 例えば, 電磁場の振動である光を様々な波長について重ね合わせ, その重ね合わせの重みに情報を乗せて, 光速での情報伝達を行えるのである.

10.5 静電場の一般的表式

重ね合わせの原理を用いると、(10.7) 式を、複数の点電荷がある場合に一般化することができる。具体的に、大きさ Q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) の電荷が位置 \vec{r}_j にある時、位置 \vec{r} ができる電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} Q_j \quad (10.13)$$

と表せ、各点電荷が独立に作る電場の重ね合わせとなる。この電場は、電気力線を用いて、図 10.2 のように可視化できる。電気力線とは、その線上の各点 \vec{r} で、 $\vec{E}(\vec{r})$ が接ベクトルとなっているような曲線である。まさに、正電荷は電場の湧き出し口であり、負電荷が引き込み口となっているのが見て取れる。

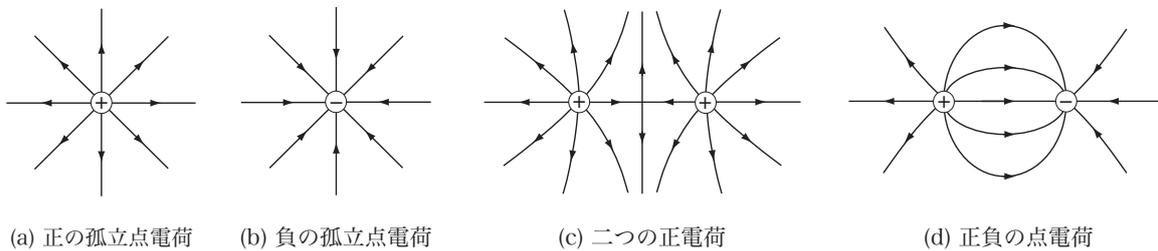


図 10.2: 点電荷が作る電気力線

より一般的な静電場の表式は、電荷密度 ρ を用いて構成できる。具体的に、位置 \vec{r}_j を含む体積 $\Delta^3 r_j \equiv \Delta x_j \Delta y_j \Delta z_j$ の微小領域にある電荷は、 $\rho(\vec{r}_j) \Delta^3 r_j$ と表せる。求める電場は、それらが作る電場を重ね合わせた次式となる。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \rho(\vec{r}_j) \Delta^3 r_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') d^3 r'. \quad (10.14)$$

この積分式に点電荷の集まりからなる電荷密度

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n Q_j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

を代入すると、(10.13) 式が再現される。

10.6 クーロンの法則

(10.13) 式の電場がある時、位置 \vec{r} にある大きさ Q の点電荷が受ける力は、

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (10.15)$$

と表せる. この点電荷間に働く力の法則をクーロンの法則という. (10.15) 式で $n = 1$ の場合について, 二つの点電荷間に働く力の方向を描くと, 図 10.3 のようになる. 2 点を結ぶ直線上に力が作用し, 電荷が同符号の場合に斥力, 異符号の場合に引力となる. また, 力の大きさは, 点電荷の積 QQ_1 に比例し, 点電荷間の距離 $|\vec{r} - \vec{r}_1|$ の 2 乗に反比例する.

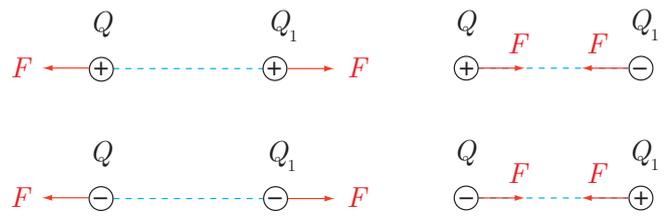


図 10.3: 二つの点電荷間に働く力の方向

クーロンの法則 (10.15) は, フランス人科学者のクーロン (1736~1806) に因んで名づけられた. 彼は, 1785 年に, ねじり天秤を用いた実験により, 二つの点電荷の間に, (10.15) 式で表される力が働くことを明らかにした. 電荷の単位の C (クーロン) も彼の名前に由来する. この法則 (10.15) は, 力学におけるニュートンの万有引力の法則と同じ形をしている. このため, その発見は, 古典力学的世界観, すなわち, 距離を隔てた粒子間に直接相互作用が働くという遠隔作用 (action at a distance) の立場の正しさを, より確実にするものであるとみなされた. これに反旗を翻したのが, ファラデー (1791~1867) である. その着想は, 数学的には, (10.15) 式を $\vec{F} = Q\vec{E}$ と表現し, 電場 \vec{E} という場の実在を主張したことに相当する. この一見すると単純な力の書き換え $\vec{F} = Q\vec{E}$ が, その後の物理学全体を大きく変革していくことになる.

10.7 静電ポテンシャル

図 10.2 から予想されるように, 湧き出し電場 (10.14) は,

$$\text{rot}\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (10.16)$$

を満たす渦なしの場である. 一般に, (10.16) 式を満たすベクトル場は,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (10.17)$$

のように, あるポテンシャル $\phi(\vec{r})$ の勾配として表せる (例題 10.2). このポテンシャル $\phi(\vec{r})$ を静電ポテンシャル, ϕ が一定の面を等電位面という. (10.17) 式からは, 電場が等電位面に垂直であることがわかる.

例題 10.2 ストークスの定理 (9.10) を用いて, 条件 (10.16) を満たす \vec{E} が, (10.17) 式のように表されることを示し, $\phi(\vec{r})$ の表式を求めよ.

解答 (10.16) 式の左辺と右辺を入れ換え, 図 9.5 の曲面 S 上で単位法線ベクトル \vec{n} との内積をとり, 面積分を行う. そしてストークスの定理 (9.10) を用いて

$$0 = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (10.18)$$

と変形する. 最後の式では, 図 10.4 のように, 閉曲線 C を C_1 と C_2 に分割し, C 上の周回積分を, C 上の点 \vec{r}_0 から点 \vec{r} への線積分の差として表現した.

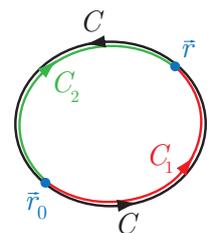


図 10.4:

C_2 積分の負符号は、積分の上下限の入れ換えに由来する。(10.18) 式と C が任意に選べることより、ベクトル場 \vec{E} に関する点 \vec{r}_0 から点 \vec{r} への線積分が、積分経路によらず、ただ一つの決まった値を持つことがわかる。従って、(10.16) 式を満たすベクトル場については、適当に選んだ 1 点 \vec{r}_0 を基準点とする線積分

$$\phi(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \quad (10.19)$$

により、点 \vec{r} での関数値 $\phi(\vec{r})$ が一意に定義できる。(10.19) 式は、ベクトル場 $\vec{E}(\vec{r})$ が、 $\phi(\vec{r})$ の勾配 (10.17) であることの積分表現である。その負符号は、ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ の小さくなる方向に速度場が生じるようにつけられている。 ■

静電場が与えられた時、(10.17) 式を線積分すると、静電ポテンシャルが得られる。例えば、原点に点電荷がある場合の電場 (10.7) に対する静電ポテンシャルは、

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (10.20)$$

と求まる (例題 10.3)。

例題 10.3 (10.7) 式を線積分することにより、(10.20) 式を導出せよ。ただし、電場の大きさが 0 となる無限遠点を基準点とする。

解答 出発点は、(10.19) 式である。その基準点 \vec{r}_0 を、電場の大きさが 0 となる \vec{r} 方向の無限遠点

$$\vec{r}_0 \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} s \vec{r} \equiv \infty \vec{r}$$

に選び、そこから \vec{r} への直線経路上で積分を行う。経路上の一般の点 \vec{s} と微小変位 $d\vec{s}$ は、 \vec{r} 方向の単位ベクトル $\vec{n} \equiv \vec{r}/r$ を用いて、

$$\begin{cases} \vec{s} = \vec{n} s & (\infty \geq s \geq r) \\ d\vec{s} = \vec{n} ds \end{cases}$$

と表せる。これらを用いると、直線経路上の $\vec{E}(\vec{s})$ の線積分が、(10.7) 式を用いて、次のように容易に実行できる。

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= - \int_{\infty \vec{n}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r \vec{E}(\vec{n}s) \cdot \vec{n} ds = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{n}s}{s^3} \cdot \vec{n} ds \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{ds}{s^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{s} \right]_{s=\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(10.20) 式は、重ね合わせの原理を用いて、電荷密度が $\rho(\vec{r})$ であるような一般的な場合の式

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (10.21)$$

へと拡張できる。