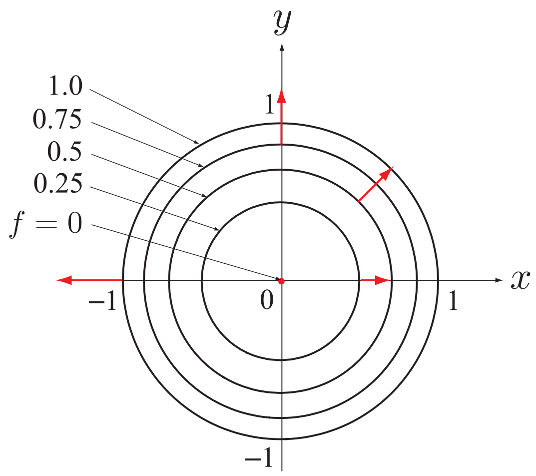
物理学 I 演習問題 7 解答例

[1] (a) $\vec{\nabla} f = (2x, 2y)$。

(b) 下図の等高線。



(c) (a) で求めた $\vec{\nabla} f$ に $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1,0)$ を代入すると、それぞれの点での勾配ベクトルとして、$(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,\sqrt{3})$, $(-2,0)$ を得る。五つのベクトルを、それらの方向と相対的な大きさが正しくなるように注意して上図に描いた。勾配ベクトルは、等高線に垂直で f が増大する方向を向き、等高線の間隔が狭いほど大きくなる。

[2] $\vec{F}(\vec{r}) \equiv (x, y)$。

(a) (1) $\vec{r} = (s,s)$, $d\vec{r} = (ds, ds)$, $\vec{F}(\vec{r}) = (s,s)$ より、$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 2s\,ds$。ゆえに、

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 2s\,ds = 1.$$

(2) $\vec{r} = (s, s^2)$, $d\vec{r} = (ds, 2s\,ds)$, $\vec{F}(\vec{r}) = (s, s^2)$ より、$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (s + 2s^3)\,ds$。ゆえに、

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (s + 2s^3)\,ds = 1.$$

(3) $\vec{r} = (\cos\theta, 1 + \sin\theta)$、$d\vec{r} = (-\sin\theta\,d\theta, \cos\theta\,d\theta)$、$\vec{F}(\vec{r}) = (\cos\theta, 1+\sin\theta)$ より、$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \cos\theta\,d\theta$。ゆえに、

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos\theta\,d\theta = \big[\sin\theta\big]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 1.$$

(b) $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0$ より、$\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$。

(c) 原点 $(0,0)$ を基準点に取り、そこから (x,y) まで適当な経路に沿って積分すれば良い。積分経路として直線を選ぶと、経路上の点は、パラメータ s_1 $(0 \le s_1 \le 1)$ を用いて $\vec{r}_1 = (xs_1, ys_1)$ と表せる。その微小変化は、$d\vec{r}_1 = (x\,ds_1, y\,ds_1)$ である。また、$\vec{F}(\vec{r}_1) = (xs_1, ys_1)$ より、$\vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 = (x^2+y^2)s_1\,ds_1$. ゆえに、

$$W(x,y) = \int_C \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 = (x^2+y^2)\int_0^1 s_1\,ds_1 = \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

(d) $W(1,1) - W(0,0) = 1 - 0 = 1$。