物理学 I 演習問題 7

[1] 二変数関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ について，以下の問いに答えよ．

(a) 勾配 $\vec{\nabla}f(x,y)$ を求めよ．

(b) $f(x,y)$ の値が 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 となる等高線の概形を描け．

(c) 点 $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(-1,0)$ における勾配を，(b) で描いた等高線上に書き入れよ．五つのベクトルについて，方向と相対的な大きさが正しくなるように注意して描くこと．

[2] 2 次元のベクトル場 $\vec{F}(\vec{r})\equiv(x,y)$ について考える。ただし $\vec{r}\equiv(x,y)$。

(a) 曲線 C を点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ に至る次のような曲線とする。それぞれの場合について、線積分 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を計算せよ。

(1) 直線 $\vec{r}=(s,s)\quad(0\le s\le 1)$。

(2) 放物線 $\vec{r}=(s,s^2)\quad(0\le s\le 1)$。

(3) 円周 $\vec{r}=(\cos\theta,1+\sin\theta)\quad(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le 0)$。

(b) $\dfrac{\partial F_x}{\partial y}=\dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ を確かめよ。

(c) $\vec{F}(\vec{r})=\vec{\nabla}W(\vec{r})$ となる関数 $W(x,y)$ を求めよ。
ヒント：　$\vec{F}\cdot d\vec{r}$ を、原点 $(0,0)$ から点 (x,y) まで、任意の線（直線、放物線など）に沿って線積分すれば良い。

(d) $W(1,1)-W(0,0)$ を計算し、(1) の結果と一致することを確かめよ。