物理学 I 演習問題 5 解答例

[1] (a) $x(t) = A\,e^{\lambda t}$ と置いて方程式に代入すると、$(\lambda^2+2\lambda+2)x = 0$ が得られる。これより、$\lambda = -1\pm i$。従って、求める独立解が、$e^{(-1\pm i)t}$ と求まる。オイラーの公式 $e^{\pm it} = \cos t \pm i \sin t$ を用いると、二つの独立解は、

$$e^{-t}\cos t, \qquad e^{-t}\sin t$$

とも表せる。

(b) $x(t) = A_1 e^{-t}\cos t + A_2 e^{-t}\sin t = e^{-t}(A_1\cos t + A_2 \sin t)$。ただし、$A_1$ と A_2 は任意の積分定数。

(c) 導関数は

$$\dot{x}(t) = -e^{-t}(A_1\cos t + A_2\sin t) + e^{-t}(-A_1\sin t + A_2\cos t).$$

従って、初期条件 $x(0)=1,\,\dot{x}(0)=0$ が、それぞれ

$$A_1 = 1, \qquad -A_1 + A_2 = 0$$

と表せる。これらを解くと、$A_1 = A_2 = 1$。求める解は、

$$x(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t) = \sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

[2] $x(t) = \mathrm{Re}\,C\,e^{i\omega t}$ と置いて左辺に代入すると、

$$\hat{L}x = \hat{L}\left(\mathrm{Re}\,C\,e^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\,C\hat{L}\,e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\,C\{(i\omega)^2 + 2i\omega + 2\}e^{i\omega t} \tag{1}$$

が得られる。一方、右辺は

$$\cos\omega t = \mathrm{Re}\,e^{i\omega t}$$

と表せる。左辺 − 右辺 = 0 より、

$$\mathrm{Re}\left\{C(-\omega^2 + 2i\omega + 2) - 1\right\}e^{i\omega t} = 0. \tag{2}$$

この式から、複素定数 C が

$$C = \frac{1}{2-\omega^2+2i\omega} = \frac{2-\omega^2-2i\omega}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2} = Ae^{-i\theta} \tag{3}$$

と求まる。ただし、実定数 A と θ は、次式で定義されている。

$$A = \frac{1}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}}, \quad \cos\theta = \frac{2-\omega^2}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}}, \quad \sin\theta = \frac{2\omega}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}} \tag{4}$$

(3) 式を $x(t) = \mathrm{Re}\,C\,e^{i\omega t}$ に代入すると、特殊解が

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re} A\,e^{i(\omega t-\theta)} = A\,\mathrm{Re}\,e^{i(\omega t-\theta)} = A\cos(\omega t-\theta) = \frac{\cos(\omega t-\theta)}{\sqrt{(2-\omega^2)^2+4\omega^2}} \\ &= \frac{(2-\omega^2)\cos\omega t + 2\omega\sin\omega t}{(2-\omega^2)^2+4\omega^2} \end{aligned} \tag{5}$$

と得られる。