物理学 I 演習問題 4

[1] 単振り子の周期の式 $T = 2\pi\sqrt{(\ell/g)}$ より、$\ell = (T/2\pi)^2 g$ が得られる。これに $T = 1$[s]、$g = 9.8$[m/s^2] を代入すると、ℓ が次のように求まる。

$$\ell = \frac{9.8}{(2\pi)^2} = 0.25\,[\mathrm{m}] = 25\,[\mathrm{cm}].$$

[2] (a) 鉛直方向の力の釣り合いの式 $mg - kx_0 = 0$ より、$x_0 = \dfrac{mg}{k}$。

(b) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$。

(c) (b) の方程式は

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) \\ &= -k(x - x_0) \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで、$x = x_0 + \bar{x}$ と置いて上の方程式に代入すると、x_0 が定数であることから、

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -k\bar{x}$$

が得られる。この微分方程式は、すでに扱っており、初期条件 $\bar{x}(0) = A$ と $\dot{\bar{x}}(0) = 0$ を満たす解が、$\bar{x}(t) = A\cos\omega t,\ \omega \equiv \sqrt{k/m}$ と得られている。この式を $x = x_0 + \bar{x}$ に代入すると、$x(t)$ が

$$x(t) = x_0 + A\cos\omega t$$

と求まる。この表式から、重力は、振動の原点を x_0 だけずらすのみであることがわかる。

[3] 指数関数の等式 $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ で、$x_j = i\theta_j$ $(j = 1, 2)$ と置くと、

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

となる。さらに、両辺をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で書き換えた後、右辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2). \end{aligned}$$

最後に、両辺の実部と虚部をそれぞれ等式で結ぶと、加法定理

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \end{aligned}$$

が得られる。このように、オイラーの公式を使うことで、非常に簡明な証明ができた！