物理学 I 演習問題 3

[1] (a) 垂直方向の力の釣り合いは、垂直抗力を N として、$N = mg$。水平方向の摩擦力 F_f は、$F_\mathrm{f} = -\mu' N = -\mu' mg$。これより、水平方向の運動方程式が、$ma = -\mu' mg$ と得られる。この式に、$a = \dfrac{dv}{dt}$ を代入して、両辺を m で割ると、

$$\frac{dv}{dt} = -\mu' g.$$

(b) 上の式を $v(0) = v_0$ の初期条件で積分すると、

$$v(t) = v_0 - \mu' g t$$

となる。この式より、停止するまでの時間が、

$$\frac{v_0}{\mu' g}$$

と得られる。

[2] (a) $m\dfrac{dv}{dt} = mg - cv^2$。

(b) 右辺の力が $v = v_\infty$ でゼロとなる条件 $mg - cv_\infty^2 = 0$ より、v_∞ が

$$v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

と得られる。

(c) v_∞ を用いて (a) の運動方程式を書き換えると、$\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{c}{m}(v_\infty^2 - v^2)$。この両辺に $\dfrac{dt}{v_\infty^2 - v^2}$ をかけ、ヒントの変形を行うと

$$\frac{1}{v_\infty^2 - v^2} dv = \frac{c}{m} dt \qquad \longleftrightarrow \qquad \left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v} \right) dv = 2v_\infty \frac{c}{m} dt$$

となる。$v < v_\infty$ を考慮して、この式を $t \in [0, t_1]$ で積分すると、

$$\int_0^{v(t_1)} \left(\frac{1}{v_\infty - v} + \frac{1}{v_\infty + v} \right) dv = 2\sqrt{\frac{cg}{m}} \int_0^{t_1} dt$$

すなわち、

$$\Big[-\ln(v_\infty - v) + \ln(v_\infty + v) \Big]_{v=0}^{v(t_1)} = \frac{1}{\tau} t_1, \qquad \qquad \frac{1}{\tau} \equiv 2\sqrt{\frac{cg}{m}}$$

となる。これより、

$$\ln \frac{v_\infty + v(t_1)}{v_\infty - v(t_1)} = \frac{t_1}{\tau}$$

が得られ、さらに $t_1 \to t$ と置き換えて両辺を e の指数の方に乗せ、

$$\frac{v_\infty + v(t)}{v_\infty - v(t)} = e^{t/\tau} \quad \longleftrightarrow \quad v_\infty + v(t) = \{v_\infty - v(t)\} e^{t/\tau} \quad \longleftrightarrow \quad \{v_\infty + v(t)\} e^{-t/\tau} = v_\infty - v(t)$$

と変形する。すると、最終的に $v(t)$ が、

$$v(t) = v_\infty \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}$$

と得られる。