物理学 I 演習問題 2 解答例

[1] z 方向の位置と速さの式は、ボールを離す時刻を $t_0 = 0$、重力加速度を $g \simeq 10$ [m/s^2] として、

$$z(t) = 100 - \frac{g}{2}t^2 \simeq 100 - 5t^2, \qquad v_z(t) = -gt \simeq -10t,$$

と表せる。ボールが地上に落ちる時刻 t_1 は、条件 $0 = z(t_1) = 100 - 5t_1^2$ より、

$$t_1 = 2\sqrt{5} \simeq 4.5 \ [\mathrm{s}]$$

と求まる。また、その時の速さは

$$v_z(t_1) \simeq -10 \times 4.5 = -45 \ [\mathrm{m/s}]$$

である。ここでの -45 の $-$ 記号は、鉛直下向きの速度であることを表している。

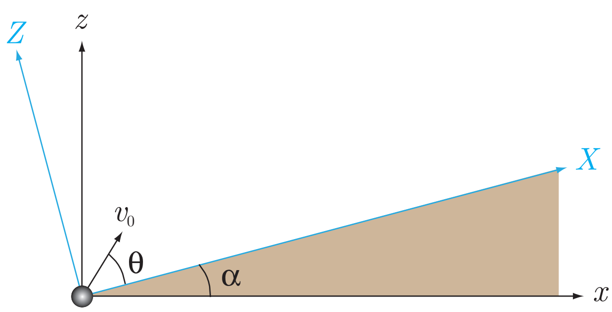
[2] 初速度は、$v_0 = \dfrac{150 \times 10^3}{60 \times 60} = \dfrac{150}{3.6} \simeq 41.7$ [m/s]。飛距離の最大値は、講義で導出した式 $x(t_2) \simeq \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ に $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $g \simeq 10$ [m/s^2] を代入して、

$$x(t_2) \simeq \frac{41.7^2}{10} \approx 1.74 \times 10^2 \approx 170 \ [\mathrm{m}]$$

と得られる。

[3] 解法 1 ： xz 座標系でボールが斜面に落ちる点に関する条件を α を用いて表す。

解法 2 ： 初速度と重力を X 方向と Z 方向に分解して考察する。



解法 2

ボールを投げ上げる位置と時刻を $\vec{r}_0 = 0$ および $t_0 = 0$ と選ぶ。すると、その後の時刻 $t > 0$ における空中のボールの位置ベクトルは、XYZ 座標系で次のように表せる。

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{g}{2}t^2 \vec{e}_z = \left(v_0 t \cos\theta - \frac{g}{2}t^2 \sin\alpha, 0, v_0 t \sin\theta - \frac{g}{2}t^2 \cos\alpha \right).$$

ここで、XYZ 座標系では z 方向の単位ベクトルが $\vec{e}_z = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)$ と表せることを用いた。斜面に落ちる時刻 t_2 は、条件 $0 = Z(t_2) = v_0 t_2 \sin\theta - \dfrac{g}{2}t_2^2 \cos\alpha$ より決まり、次のように求まる。

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g \cos\alpha}.$$

斜面に沿った飛距離は $X(t_2)$ であり、次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
X(t_2) &= \left(v_0\cos\theta - \frac{g}{2}t_2\sin\alpha\right)t_2 = \left(v_0\cos\theta - \frac{g}{2}\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}\sin\alpha\right)\frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha} \\
&= (\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\frac{2v_0^2\sin\theta}{g\cos^2\alpha} = \frac{2v_0^2\cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{g\cos^2\alpha} \\
&= v_0^2\frac{\sin(2\theta+\alpha)-\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.
\end{aligned}$$

これより、飛距離が最大となるのは、$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$、すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

の時である。

解法 1

ボールを投げ上げる位置と時刻を $\vec{r}_0 = 0$ および $t_0 = 0$ と選ぶ。すると、その後の時刻 $t > 0$ における空中のボールの位置ベクトルは、xyz 座標系で次のように表せる。

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{g}{2}t^2\vec{z} = \left(v_0 t\cos(\theta+\alpha), 0, v_0 t\sin(\theta+\alpha) - \frac{g}{2}t^2\right)$$

斜面に落ちる時刻 t_2 は、条件 $\dfrac{z(t_2)}{x(t_2)} = \tan\alpha$、すなわち、$z(t_2)\cos\alpha = x(t_2)\sin\alpha$ により決まる。この式を、次のように変形する。

$$\begin{aligned}
0 &= z(t_2)\cos\alpha - x(t_2)\sin\alpha \\
&= \left[v_0 t_2\sin(\theta+\alpha) - \frac{g}{2}t_2^2\right]\cos\alpha - v_0 t_2\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha \\
&= t_2\left\{v_0\left[\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \cos(\theta+\alpha)\sin\alpha\right] - \frac{g}{2}t_2\cos\alpha\right\} \\
&= t_2\left(v_0\sin\theta - \frac{g}{2}t_2\cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

これより、t_2 が次のように求まる。

$$t_2 = \frac{2v_0\sin\theta}{g\cos\alpha}$$

斜面に沿った飛距離は $\dfrac{x(t_2)}{\cos\alpha}$ であり、次のように変形できる。

$$\frac{x(t_2)}{\cos\alpha} = \frac{v_0 t_2\cos(\theta+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2\cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{g\cos^2\alpha} = v_0^2\frac{\sin(2\theta+\alpha)-\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}.$$

これより、飛距離が最大となるのは、$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$、すなわち

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

の時である。