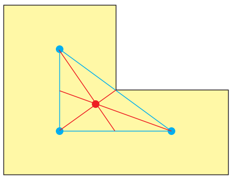
# 物理学 I 演習問題 12

**[1]** 図の赤点が重心。



**[2]** 斜面を同じ高さから転がす。速く転がり落ちた方が生卵。

**[3]** $L = I\omega$ は一定であるが、腕を縮めることで、回転軸に垂直方向の距離 $r_\perp^2$ の期待値 $I = \int_V \rho(\vec{r}) r_\perp^2 dV$ が小さくなる。従って、$\omega$ が増大する。

**[4]** (i)

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{M}{V}\int r_\perp^2 dxdydz = \frac{M}{abc}\int_0^a dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_0^c dz (x^2+y^2) \\
&\overset{z\ \text{積分}}{=} \frac{M}{abc}\int_0^a dx\, 2\int_0^{b/2} dy (x^2+y^2)c \overset{y\ \text{積分}}{=} \frac{M}{abc}\int_0^a dx\, 2\left[\left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)c\right]_{y=0}^{b/2} \\
&= \frac{M}{abc}\int_0^a dx \left(x^2 b + \frac{b^3}{12}\right)c \overset{x\ \text{積分}}{=} \frac{M}{abc}\left[\left(\frac{1}{3}x^3 b + \frac{b^3}{12}x\right)c\right]_{x=0}^{a} = \frac{M}{abc}\left(\frac{1}{3}a^3 b + \frac{b^3}{12}a\right)c \\
&= \frac{1}{3}M\left(a^2 + \frac{b^2}{4}\right).
\end{aligned}
$$

(ii) $N = \frac{a}{2}Mg\sin\theta$。力のモーメントが重心にのみ働くとして良い理由は、講義ノートの (9) 式に $\vec{f}(\vec{r}) = -Mg\vec{e}_z/V$ を代入すれば理解できる。

(iii) 角運動量の方程式 $I\dfrac{d\omega}{dt} = -N$ に $\omega = \dot{\theta}$ と $N = \frac{a}{2}Mg\sin\theta$ を代入すると、次の方程式が得られる。

$$
I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{a}{2}Mg\sin\theta \quad \overset{\sin\theta\approx\theta}{\longleftrightarrow} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{aMg}{2I}\theta
$$

これは、固有角振動数 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{aMg}{2I}}$ を持つ単振動の式。従って、

$$
T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2I}{Mga}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}
$$

が得られる。この $T$ を、長さが $a$ の糸につないだ質点による単振り子（§4.2 参照）の周期 $T_{糸} = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ と比べると、$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 倍の値となっている。