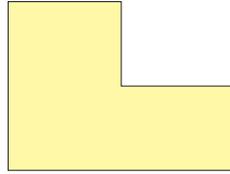


物理学 I 演習問題 12

- [1] 一様で薄い次の物体の重心を作図により求めよ。



ヒント： 三つの長方形に分割し、各々の重心から全体の重心を求める。

- [2] 生卵 (raw egg) の慣性モーメント I_r は、ゆで卵 (boiled egg) の慣性モーメント I_b より実質的に小さい。すなわち、不等式 $I_r < I_b$ が成立する。このことを用いて、卵を割らずに、ゆで卵と生卵を区別する方法を述べよ。
- [3] フィギュアスケーターがスピンするとき、手を大きく水平に伸ばした状態から、胸の前で手を縮めた状態へと変化させ、回転を加速させる。角運動量の方程式 $\frac{dL}{dt} = N$ に基づき、なぜ、この回転の加速が可能なのかを議論せよ。
- ヒント：氷が滑らかだとすると、スピンしている間に働く力のモーメント N は近似的にゼロである。すなわち、角運動量 L は保存するとみなせる。このことと、 $L = I\omega$ の表式を用いて議論する。
- [4] (発展問題—提出不要) 以下の問いに答えよ。

- (i) 下図 (a) のように、長さ a 、幅 b 、質量 M のものさしがある。このものさしの一端の midpoint (図 (b) 参照) のまわりの慣性モーメント I は、次のように表せることを示せ。

$$I = \frac{1}{3}M \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) \approx \frac{1}{3}Ma^2 \quad (a \gg b) \quad (1)$$

ヒント：図 (b) のように xy 軸をとると、回転軸からの距離 r_{\perp} の二乗は、 $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$ である。これを慣性モーメントの表式 $I = \frac{M}{V} \int r_{\perp}^2 dx dy dz$ に代入し、 $0 \leq x \leq a$ 、 $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$ 、 $0 \leq z \leq c$ について積分し、 $V = abc$ を代入する。ここで、 c はものさしの厚さである。三次元積分であるが、一次元積分の繰り返しで容易に実行できる。

- (ii) 力が重心に働くものとして、力のモーメントの大きさ N を求めよ。
- (iii) 角運動量の方程式 $I \frac{d\omega}{dt} = -N$ より、この単振り子の周期が、次のように表せることを示せ。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg(a/2)}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

ヒント： $\omega = \dot{\theta}$ の関係を用いる。ベクトル $\vec{L} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ は紙面上向き、 $\vec{N} = \vec{r} \times (-Mg\vec{e}_z)$ は紙面下向きで、それらの方向が逆なので、角運動量の方程式の右辺に負符号がついている。

