§9 運動量保存則

例えばビリヤード球が衝突する場合のように、二つの質点が衝突するとき、衝突前後で全運動量と呼ばれるベクトル量が保存する（＝変化しない）ことが知られている。すなわち、右の図で、

$$m_1\vec{v}_{1\mathrm{i}} + m_2\vec{v}_{2\mathrm{i}} = m_1\vec{v}_{1\mathrm{f}} + m_2\vec{v}_{2\mathrm{f}} \tag{1}$$

が成立する。今回の授業では、この運動量保存則をニュートンの運動方程式から導き、その応用例を学ぶ。また、重心の概念についても学習する。

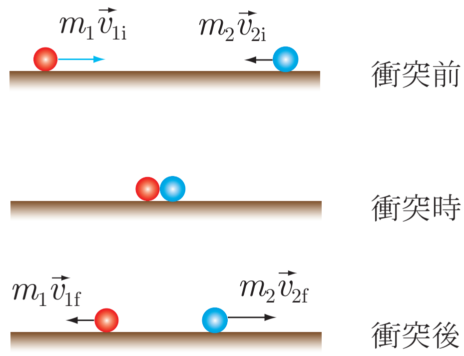


図 1: 二つの質点の衝突

1　作用・反作用の法則

一般に次のことが成り立つ。

「物体 1 と物体 2 の間の相互作用ポテンシャル $U(r_{12})$ が、それらの物体間の距離

$$r_{12} \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \left\{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right\}^{1/2} \tag{2}$$

のみに依存する時、物体 1 が物体 2 から受ける力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ と、物体 2 が物体 1 から受ける力 $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ との間には、

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{2\leftarrow 1} \qquad : \text{作用・反作用の法則} \tag{3}$$

が成立する。」このように、二つの力は大きさが等しく方向が反対である。

証明

保存力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ は、$U(r_{12})$ から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1\leftarrow 2} &= -\vec{\nabla}_1 U(r_{12}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}U(r_{12}) \qquad \text{合成関数の微分則を使う}\\ &= -\frac{\partial r_{12}}{\partial \vec{r}_1}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}}.\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$\dfrac{\partial r_{12}}{\partial \vec{r}_1}$ は、(2) 式を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_{12}}{\partial \vec{r}_1} &= \frac{\partial\left\{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right\}^{1/2}}{\partial \vec{r}_1}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}\left\{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right\}}{\left\{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right\}^{1/2}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{r_{12}}\\ &= \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.\end{aligned} \tag{5}$$

この結果を (4) 式に代入すると、$\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ が

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} \tag{6a}$$

と得られる。同様に $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ は、添字 1 と 2 を入れ替えて $r_{21} = r_{12}$ および $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{r}_{12}$ に注意すると、

$$\vec{F}_{2\leftarrow 1} = -\vec{\nabla}_2 U(r_{12}) = -\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}\frac{dU(r_{21})}{dr_{21}} = -\frac{-\vec{r}_{12}}{r_{12}}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} \tag{6b}$$

と求まる。ゆえに $\vec{F}_{1\leftarrow 2} = -\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ が成立する。証明終わり。

2 二粒子系の運動量保存則

質点 1 と質点 2 が、作用・反作用の法則 (3) に従う力を受けて運動している場合を考察する。それらの運動方程式は、それぞれ

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{1\leftarrow 2}, \tag{7a}$$

$$m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{2\leftarrow 1}, \tag{7b}$$

と表せる。ここで、質点 i $(i = 1, 2)$ の運動量 $\vec{p}_i$ を、

$$\vec{p}_i \equiv m_i\vec{v}_i \tag{8}$$

で定義する。すると (7) 式は、

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1\leftarrow 2}, \tag{9a}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{2\leftarrow 1}, \tag{9b}$$

と表せる。これらの式を辺々足した式は、

$$\text{全運動量:}\quad \vec{P} \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \tag{10}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{2\leftarrow 1}\\ &= \vec{0}\end{aligned} \tag{11}$$

と表現できる。すなわち、作用・反作用の法則 (3) に従う力を受けて運動する二つの質点系では、全運動量 $\vec{P}$ が時間変化しない（＝保存する）ことがわかった。図 1 のような衝突の際に働く力は、作用・反作用の法則 (3) を満たすので、衝突の前後で運動量保存則 (1) が成立する。

3 完全弾性衝突と非弾性衝突—正面衝突の場合—

さらに、力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ と $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ が (i) 保存力で (ii) 衝突の際にのみ働く場合には、力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{i}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{i}}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{f}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{f}}^2 \tag{12}$$

も成立する。この場合の衝突を完全弾性衝突という。

特に、衝突前後の相対速度が一直線上にある正面衝突の場合には、(12) 式をより簡単な表式に還元できる。具体的に (12) 式を二倍して移項し、次のように変形する。

$$\begin{aligned}
0 &= m_1(v_{1\mathrm{f}}^2-v_{1\mathrm{i}}^2)+m_2(v_{2\mathrm{f}}^2-v_{2\mathrm{i}}^2)\\
&= m_1(v_{1\mathrm{f}}-v_{1\mathrm{i}})(v_{1\mathrm{f}}+v_{1\mathrm{i}})+m_2(v_{2\mathrm{f}}-v_{2\mathrm{i}})(v_{2\mathrm{f}}+v_{2\mathrm{i}})\\
&\qquad\qquad\qquad \text{正面衝突の場合の (1) 式より、} m_2(v_{2\mathrm{f}}-v_{2\mathrm{i}})=-m_1(v_{1\mathrm{f}}-v_{1\mathrm{i}})\\
&= m_1(v_{1\mathrm{f}}-v_{1\mathrm{i}})\left\{(v_{1\mathrm{f}}+v_{1\mathrm{i}})-(v_{2\mathrm{f}}+v_{2\mathrm{i}})\right\}.
\end{aligned} \tag{13}$$

従って、速度が変化する ($v_{1\mathrm{i}}\neq v_{1\mathrm{f}}$) 完全弾性正面衝突では、$(v_{1\mathrm{f}}+v_{1\mathrm{i}})-(v_{2\mathrm{f}}+v_{2\mathrm{i}})=0$、すなわち

$$v_{1\mathrm{f}}-v_{2\mathrm{f}}=-(v_{1\mathrm{i}}-v_{2\mathrm{i}}) \tag{14}$$

が成立し、相対速度の符号が衝突前後で入れ替わることがわかる。

衝突に際しては、運動エネルギーの一部が熱などに変わり、(12) が成立しないこともある。しかし、衝突に際して作用反作用の法則 (3) が成り立てば、運動量保存則 (1) は満たされる。そのような正面衝突を数学的に記述するには、(14) 式を

$$v_{1\mathrm{f}}-v_{2\mathrm{f}}=-e(v_{1\mathrm{i}}-v_{2\mathrm{i}}) \qquad\qquad e\in[0,1] \tag{15}$$

のように一般化すると便利である。この e を衝突係数、また、$e<1$ の衝突を非弾性衝突という。

4 完全弾性衝突—正面衝突でない場合—

正面衝突でない場合には、完全弾性衝突もより複雑になる。具体例として、図 2 のように、質量 m を持つビリヤード球 1 をキューで突き、同じ質量を持ち静止しているビリヤード球 2 を狙う場合を考察する。衝突前の速度は、ビリヤード台上で

$$\vec{v}_{1\mathrm{i}}=(v,0),\qquad \vec{v}_{2\mathrm{i}}=(0,0) \tag{16}$$

であったとする。衝突後に、球 1 と球 2 が図 2 のように散乱されたとすると、衝突後の速度は、

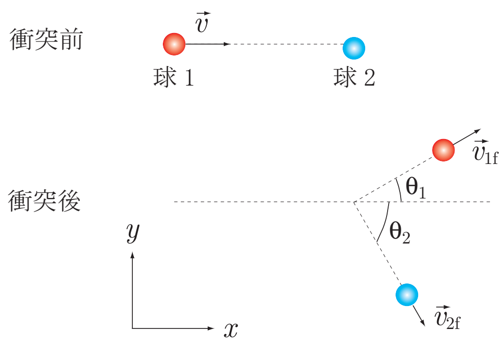


図 2: 二つの質点の完全弾性衝突

$$\vec{v}_{1\mathrm{i}}=(v_{1\mathrm{f}}\cos\theta_1, v_{1\mathrm{f}}\sin\theta_1),\quad \vec{v}_{2\mathrm{i}}=(v_{2\mathrm{f}}\cos\theta_2,-v_{2\mathrm{f}}\sin\theta_2) \tag{17}$$

と表せる。明らかにしたいのは、球 1 と球 2 の衝突後の速さ $(v_{1\mathrm{f}}, v_{2\mathrm{f}})$、および、二つの散乱角 (θ_1,θ_2) の関係である。

まず、この場合の運動量保存則 $m\vec{v}_{1\mathrm{f}} + m\vec{v}_{2\mathrm{f}} = m\vec{v}$ を m で割って成分表示すると、

$$x \text{ 方向:} \quad v_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 + v_{2\mathrm{f}} \cos\theta_2 = v \tag{18a}$$

$$y \text{ 方向:} \quad v_{1\mathrm{f}} \sin\theta_1 - v_{2\mathrm{f}} \sin\theta_2 = 0 \tag{18b}$$

が得られる。さらに、エネルギー保存則 $\frac{1}{2}mv_{1\mathrm{f}}^2 + \frac{1}{2}mv_{2\mathrm{f}}^2 = \frac{1}{2}mv^2$ より、

$$v_{1\mathrm{f}}^2 + v_{2\mathrm{f}}^2 = v^2 \tag{18c}$$

が成り立つ。(18b) 式は、

$$\sin\theta_2 = \frac{v_{1\mathrm{f}}}{v_{2\mathrm{f}}} \sin\theta_1 \tag{19}$$

と書き換えられる。一方、(18a) 式から得られる関係

$$v_{2\mathrm{f}}^2 \cos^2\theta_2 = (v - v_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1)^2$$

で $\cos^2\theta_2 = 1 - \sin^2\theta_2$ と表し、(19) 式を代入すると、

$$v_{2\mathrm{f}}^2 \left[1 - \frac{v_{1\mathrm{f}}^2}{v_{2\mathrm{f}}^2} \sin^2\theta_1\right] = v^2 - 2vv_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 + v_{1\mathrm{f}}^2 \cos^2\theta_1$$

すなわち

$$v_{2\mathrm{f}}^2 = v^2 - 2vv_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 + v_{1\mathrm{f}}^2 \tag{20}$$

が得られる。この式を (18c) に代入すると、$v_{1\mathrm{f}}^2 + v^2 - 2vv_{1\mathrm{f}} \cos\theta_1 + v_{1\mathrm{f}}^2 = v^2$、すなわち

$$2v_{1\mathrm{f}}(v_{1\mathrm{f}} - v\cos\theta_1) = 0$$

が成立することがわかる。この式より、$v_{1\mathrm{f}}$ が

$$v_{1\mathrm{f}} = v\cos\theta_1 \tag{21a}$$

と得られる。さらに、(21a) 式を (20) 式に代入すると、$v_{2\mathrm{f}}^2 = v^2 - 2v^2\cos^2\theta_1 + v^2\cos^2\theta_1 = v^2\sin^2\theta_1$ より、$v_{2\mathrm{f}}$ が

$$v_{2\mathrm{f}} = v\sin\theta_1 \tag{21b}$$

と求まる。最後に、(21a) 式と (21b) 式を (19) 式に代入すると、

$$\sin\theta_2 = \frac{v\cos\theta_1}{v\sin\theta_1}\sin\theta_1 = \cos\theta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right),$$

すなわち

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \tag{22}$$

と θ_2 が θ_1 を用いて表すことができた。このように、二つの球は直角に散乱される。

以上をまとめると、衝突後の二つの球の速度は、以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1\mathrm{f}} &= (v_{1\mathrm{f}}\cos\theta_1, v_{1\mathrm{f}}\sin\theta_1) \\ &= (v\cos^2\theta_1, v\cos\theta_1\sin\theta_1), \end{aligned} \tag{23a}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{2\mathrm{f}} &= (v_{2\mathrm{f}}\cos\theta_2, -v_{2\mathrm{f}}\sin\theta_2) = \left(v\sin\theta_1\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right), -v\sin\theta_1\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right) \\ &= (v\sin^2\theta_1, -v\cos\theta_1\sin\theta_1). \end{aligned} \tag{23b}$$

5　質点系の重心とその運動方程式

前節の二質点系の考察を、n 個の質点系に一般化し、重心の概念を導入する。質量 m_i の質点 i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に力 $\vec{F}_i$ が働く時、その運動方程式は、

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \tag{24}$$

で与えられる。さらに、$i = 1, 2, \cdots, n$ について和をとると、

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{25}$$

となる。この式の左辺は、m_i が定数であることを用いて、次のように書き換えられる。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

ただし、

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_n \vec{v}_n \tag{26}$$

は全運動量である。さらに、質点に働く力の和、すなわち外力

$$\vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n, \tag{27}$$

を導入すると、(25) 式は、

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{28}$$

と表せる。特に、外力がゼロ、すなわち $\vec{F} = \vec{0}$ の場合には、$\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}$ が成立し、全運動量が保存する（＝時間変化しない）ことが結論づけられる。

(26) 式を全質量

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + \cdots + m_n \tag{29}$$

で割った式

$$\vec{V} \equiv \frac{\vec{P}}{M} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + \cdots + m_n} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \cdots + m_n \dot{\vec{r}}_n}{m_1 + \cdots + m_n} \tag{30}$$

を、重心の速度という。言い換えると、質点系の重心は、

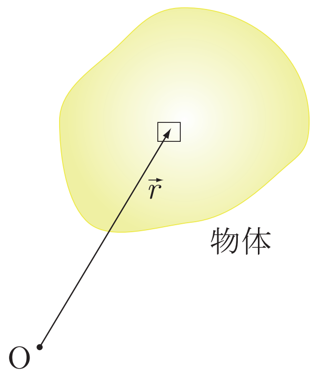
$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + \cdots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n} \tag{31}$$

で定義され、その速度 $\vec{V} \equiv \dot{\vec{R}}$ は、(28) 式と (30) 式より、運動方程式

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \tag{32}$$

に従うことがわかる。

質点系の重心 (31) を参考にすると、有限の大きさの物体に関しても重心が定義できる。物体の密度を $\rho(\vec{r})$ とすると、位置 $\vec{r}$ の周りの微小領域の質量 $dm(\vec{r})$ は、$\rho(\vec{r})$ に微小領域の体積 $dV \equiv dxdydz$ をかけ、



$$dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r})dV$$

と表せる。従って、物体の質量 M は

$$M = \int_V dm = \int_V \rho(\vec{r})dV, \tag{33}$$

また、物体の重心 $\vec{R}$ は

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV \tag{34}$$

により計算できる。ただし $\int_V$ は物体の領域全体にわたる体積積分である。