§8 エネルギー保存則（２）

今回の授業では、力学的エネルギー保存則の一般論を展開する。また、保存力のポテンシャルの例として、万有引力のポテンシャルを求める。

1 仕事

ニュートンの運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$、すなわち

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{1}$$

から導かれる仕事の概念を復習しよう。(1) 式と速度 $\vec{v}$ とのスカラー積（内積）を取ると、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

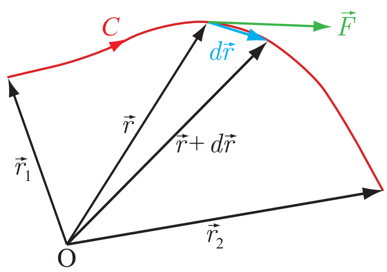
が得られる。さらに、$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}$ と $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ を用いると、

$$\frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

へと変形できる。そして、$t \in [t_1, t_2]$ について積分すると、

$$\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d(v^2)}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

となる。ここで、左辺と右辺でそれぞれ変数変換 $t \to v^2$、$t \to \vec{r}$ を行う。ただし、$\vec{r} = \vec{r}(t)$ は物体の運動の軌跡、すなわち移動経路 C である。すると、



$$\frac{m}{2}\int_{v_1^2}^{v_2^2}d(v^2) = \int_{\vec{r}_1(C)}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

すなわち

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1(C)}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{2}$$

が得られる。ただし、右辺の積分の (C) は、経路 C に沿っての線積分であることを表す。この左辺は、時刻 t_1 から t_2 の間における運動エネルギーの変化である。この変化をもたらす右辺を記号 $\Delta W_{1\to2}$ で表し、仕事と呼ぶことにする。すなわち、仕事 $\Delta W_{1\to2}$ は、線積分

$$\Delta W_{1\to2} \equiv \int_{\vec{r}_1(C)}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{3}$$

で定義されている。仕事の単位は、エネルギーと同じジュール [J] である。

2　保存力と力学的エネルギー保存則

前回の授業では、(3) 式の積分が経路に依らないための条件を、独立変数が二つの場合 $\vec{r} = (x, y)$ について求めた。その条件は、力 $\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(\vec{r}), F_y(\vec{r}))$ を用いて、

$$\frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} = 0$$

と表すことができる。この性質を持つ力を保存力という。この二次元空間 $\vec{r} = (x, y)$ での保存力に関する条件は、三次元空間 $\vec{r} = (x, y, z)$ へも拡張でき、

$$\frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial F_z(\vec{r})}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_z(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

と表すことができる。証明は、二次元でのグリーンの定理を、その三次元版であるストークスの定理で置き換えれば、前回と同様に実行できる。興味のある人は、最後の節に与えた「ストークスの定理の証明」を参照されたい。

力が保存力（＝渦なしの場）である場合には、その力に関する線積分 (3) は、積分経路に依らない。そこで、積分記号の経路 (C) を省略し、基準点 $\vec{r}_0$ を適当に選んで、(3) 式を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
\Delta W_{1\to 2} &= \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \right) \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad \text{第一項で積分の上下限入れ替え} \\
&= \left(-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \right) \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&\equiv U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2).
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで導入した

$$U(\vec{r}_1) \equiv -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{6}$$

を、点 $\vec{r}_0$ を基準点とするポテンシャルエネルギーと呼ぶ。言い換えると、保存力 $\vec{F}(\vec{r})$ は、ポテンシャル $U(\vec{r})$ を用いて、

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} \right) \tag{7}$$

と表せる。すなわち、力 $\vec{F}(\vec{r})$ はポテンシャル $U(\vec{r})$ の勾配（に負符号つけたもの）である。負符号は、力が、ポテンシャルの勾配 $\vec{\nabla} U(\vec{r})$ と逆方向（ポテンシャルが小さくなる方向）に働くことを表している。

(5) 式を (2) 式に代入すると、

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} m v_2^2 + U(\vec{r}_2) = \frac{1}{2} m v_1^2 + U(\vec{r}_1)$$

が得られる。すなわち、

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(\vec{r}) \tag{8}$$

で定義された力学的エネルギーが保存することがわかった。

3　重力場のポテンシャル

重力 $\vec{F}(\vec{r})$ は、

$$\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, -mg) \tag{9}$$

と表すことができる。ただし、地表から鉛直上向きに z 軸を選んだ。(9) 式の $\vec{F}$ は定ベクトルで、明らかに (4) 式を満たし、保存力である。そのポテンシャル $U(\vec{r})$ は、

$$U(\vec{r}) = mgz \tag{10}$$

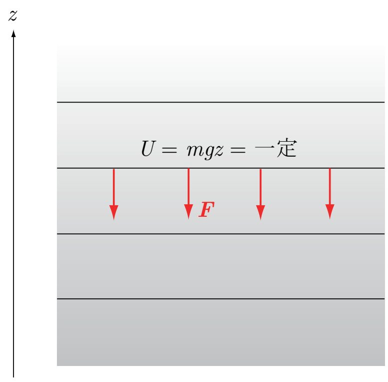
と表せることをすでに見た。実際、この $U(\vec{r})$ に負符号をつけてナブラ演算子

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \tag{11}$$

を作用させると、

$$-\vec{\nabla} U(\vec{r}) = (0, 0, -mg)$$

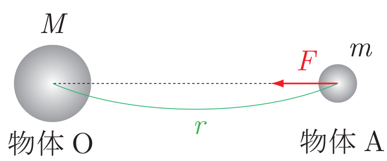
となり、重力場が得られる。



4　万有引力とそのポテンシャル

質量 m の物体 A が質量 M の物体 O から受ける力の大きさ F は、物体間の距離 r の二乗に反比例し質量の積に比例する。すなわち、G を定数として、

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{12}$$

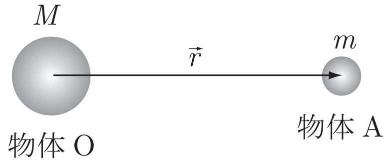


と表すことができる。さらに、力の方向は二つの物体間を結ぶ直線上にあり、物体 O の方を向く引力である。以上の観測事実を万有引力の法則という。定数 G は

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg{\cdot}s^2} \tag{13}$$

の値を持ち、万有引力定数と呼ばれる。

万有引力の法則 (12) は、ベクトルを用いると、力の方向まで含めて数式で表現できるようになる。具体的に、物体 O の位置を原点に選び、O から A の方向への単位ベクトルが



$$\vec{e}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r} \tag{14}$$

であることに注意する。そして、(12) 式に $-\vec{e}_r$ をかけ、力が物体 O の方向を向いていることを表現する。すると、方向まで含めた万有引力の法則が、次のように表せる。

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}. \tag{15}$$

万有引力 (15) は、(4) 式を満たす保存力（渦なしの場）である。

証明

$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ に注意し、(15) 式を成分表示すると、次のようになる。

$$(F_x, F_y, F_z) = -GmM\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \tag{16}$$

この表現を用いると、(4) 式の第一式の左辺が次のように変形できる。

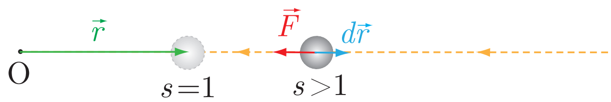
$$\begin{aligned}\frac{\partial F_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial z} &= -GmM\left\{\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\} \\ &= -GmM\left\{z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\} \\ &= -GmM\left\{z\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - y\frac{-\frac{3}{2}\cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right\} \\ &= -GmM\left\{\frac{-3zy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} - \frac{-3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

(4) 式の第二・三式についても同様に示せる。証明終わり。

保存力 (15) に対するポテンシャル (6) を求めよう。この場合には、基準点を、力の大きさが 0 となる無限遠に選ぶと便利である。そして、積分経路として $\vec{r}_1$ 方向の無限遠点から $\vec{r}_1$ に至る直線経路

$$\vec{r} = \vec{r}_1 s, \qquad s \in [1, \infty]$$

を選ぶ。この経路上での微小変位 $d\vec{r}$ は



$$d\vec{r} = \vec{r}_1 ds$$

と表せ、(15) 式との内積（スカラー積）は、

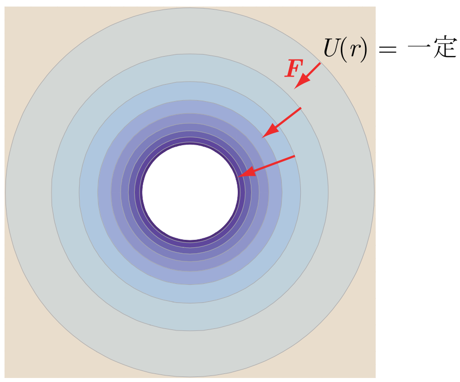
$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r} = -G\frac{mM}{(r_1 s)^3}\vec{r}_1 s\cdot\vec{r}_1 ds = -G\frac{mM}{r_1^3 s^3}r_1^2 s ds = -G\frac{mM}{r_1}\frac{ds}{s^2}$$

と計算できる。この式を (6) 式に代入すると、万有引力ポテンシャルが、

$$U(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1\infty}^{\vec{r}_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = G\frac{mM}{r_1}\int_\infty^1\frac{ds}{s^2} = G\frac{mM}{r_1}\left[-\frac{1}{s}\right]_{s=\infty}^1 = -G\frac{mM}{r_1}$$

と求まる。すなわち、重力場のポテンシャルが

$$U(r) = -G\frac{mM}{r} \tag{18}$$



と得られた。ただし、引数を $\vec{r}_1 \to \vec{r}$ と置き換え、さらに、右辺が距離 $r=|\vec{r}|$ のみの関数であることを考慮して、ポテンシャル U の引数も $\vec{r}\to r$ と置き換えた。

(18) 式を (8) 式に代入すると、質量 m の物体が、原点にある質量 M の物体からの万有引力の下で運動する時の力学的エネルギーが、次のように得られる。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}. \tag{19}$$

物体 O の位置を原点に選んだ (18) 式は、物体 O を特別扱いしている。そこで、原点を物体 O からずらし、二つの物体の新たな位置ベクトルを用いて (18) 式を書き換えると、

$$U(|\vec{r}_{\mathrm{A}}-\vec{r}_{\mathrm{O}}|)=-G\frac{mM}{|\vec{r}_{\mathrm{A}}-\vec{r}_{\mathrm{O}}|} \tag{20}$$

となる。これを物体 O と物体 A の万有引力ポテンシャルという。その顕著な特徴は、物体間の距離 $|\vec{r}_{\mathrm{A}}-\vec{r}_{\mathrm{O}}|$ のみの関数である点にある。

5　作用・反作用の法則

一般に次のことが成り立つ。
「物体 1 と物体 2 の間の相互作用ポテンシャル $U(r_{12})$ が、それらの物体間の距離

$$r_{12}\equiv|\vec{r}_1-\vec{r}_2|=\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right\}^{1/2} \tag{21}$$

のみに依存する時、物体 1 が物体 2 から受ける力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ と、物体 2 が物体 1 から受ける力 $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ との間には、

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2}=-\vec{F}_{2\leftarrow 1} \tag{22}$$

の関係が成立する。」これを作用・反作用の法則という。
証明
保存力 $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ は、$U(r_{12})$ から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1\leftarrow 2}&=-\vec{\nabla}_1U(r_{12})=-\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1}U(r_{12}) \qquad \text{合成関数の微分則を使う}\\&=-\frac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_1}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}}.\end{aligned} \tag{23}$$

ここで、$\dfrac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_1}$ は、(21) 式を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_{12}}{\partial\vec{r}_1}&=\frac{\partial\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right\}^{1/2}}{\partial\vec{r}_1}\\&=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1}\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right\}}{\left\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right\}^{1/2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{r_{12}}\\&=\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}.\end{aligned} \tag{24}$$

この結果を (23) 式に代入すると、$\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ が

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2}=-\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} \tag{25a}$$

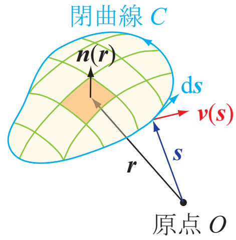
と得られる。同様に $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ は、添字 1 と 2 を入れ替えて $r_{21}=r_{12}$ および $\vec{r}_{21}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=-(\vec{r}_1-\vec{r}_2)=-\vec{r}_{12}$ に注意すると、

$$\vec{F}_{2\leftarrow 1}=-\vec{\nabla}_2U(r_{12})=-\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}\frac{dU(r_{21})}{dr_{21}}=-\frac{-\vec{r}_{12}}{r_{12}}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}}=\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\frac{dU(r_{12})}{dr_{12}} \tag{25b}$$

と求まる。ゆえに $\vec{F}_{1\leftarrow 2}=-\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ が成立する。証明終わり。

6　補足：ストークスの定理（渦定理）

数学の定理である ストークスの定理 は、水や空気の流れを表す速度場 $\vec{v}(\vec{r})$ を例にとって考えるのが最も理解しやすい。その内容は、次の通りである。



$$\int_C \vec{v}(\vec{s})\cdot d\vec{s} = \int_S \left[\vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r})\right]\cdot\vec{n}(\vec{r})\,dS. \tag{26}$$

ここで dS は微小曲面の面積、$\vec{n}(\vec{r})$ はその面に立てた単位法線ベクトルを表す。また、$\vec{\nabla}\times\vec{v}\equiv \mathrm{rot}\,\vec{v}$ はベクトル場 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ の回転 (rotation) あるいは渦 (curl) と呼ばれ、ナブラ演算子 (11) を用いて次式で定義されている。

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\times\vec{v}(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z}, \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}\right). \tag{27}$$

定理の物理的意味な次の通りである。曲線 C の内側に渦があるかどうか、およびその強度を調べるには、曲線 C に回る向きを与え、C 上で速度場 $\vec{v}(\vec{r})$ を線積分すれば良い。これが (26) 式の左辺である。「ストークスの定理」は、そのように直観的に定義された C 内の渦強度が、右辺の面積分に変換できることを表している。従って、$\mathrm{rot}\,\vec{v}(\vec{r})$ は、点 $\vec{r}$ における渦密度の定義式と見なせることがわかる。

(26) 式で $\vec{v}(\vec{r})\to(u_x(x,y),u_y(x,y),0)$ と置き、曲面 S を xy 面上の閉領域 S' で置き換えると、$\vec{n}(\vec{r})=(0,0,1)$ となり、(26) 式は二次元領域におけるグリーンの定理

$$\int_{C'}\{u_x(x,y)dx+u_y(x,y)dy\} = \int_{S'}\left\{\frac{\partial u_y(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial y}\right\}dS' \tag{28}$$

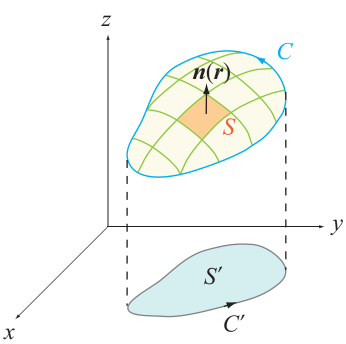
に還元される（$dS'\equiv dxdy$）。従って、ストークスの定理は、グリーンの定理の三次元版であると見なせる。また、(26) 式で v_x のみが有限である場合を考えると、

$$\int_C v_x(\vec{r})dx = \int_S\left\{\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}n_y(\vec{r})-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}n_z(\vec{r})\right\}dS \tag{29}$$

が成立することもわかる。

証明

グリーンの定理 (28) を既知として、(29) 式についてのみ証明する。何故なら、同様の証明が v_y あるいは v_z のみが有限である場合にも実行でき、(26) はそれら三つの式を足し合わせることで得られるからである。さて、曲面 S が方程式 $z=f(x,y)$ で表せるものとすると、S 上での速度場 $v_x(\vec{r})$ は、$v_x(x,y,f(x,y))$ と表せる。この (x,y) のみの関数を、新たに



$$u_x(x,y)\equiv v_x(x,y,f(x,y)) \tag{30a}$$

と置くことにする。すると、(29) 式の右辺第二項の微分は、合成関数の微分則を用いて、

$$\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v_x(x,y,f(x,y))}{\partial y} = \left\{\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\}_{z=f(x,y)} \tag{30b}$$

と表せる。一方、グリーンの定理 (28) で $u_y(x,y)=0$ とおくと、

$$\int_{C'}u_x(x,y)dx = -\int_{S'}\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial y}dS' \tag{31}$$

が成立する。(31) 式の両辺に (30) 式を代入すると、

$$\int_{C'} v_x(x,y,f(x,y))dx = -\int_{S'} \left\{ \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right\}_{z=f(x,y)} dS' \tag{32}$$

となる。さらに

$$\int_{C'} v_x(x,y,f(x,y))dx = \int_C v_x(x,y,z)dx, \qquad dS' = n_z(\vec{r})dS \tag{33}$$

に注意すると、(32) 式は

$$\int_C v_x(x,y,z)dx = -\int_S \left\{ \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y} n_z(\vec{r}) + \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} n_z(\vec{r}) \right\} dS \tag{34}$$

へと書き換えられる。一方、曲面 S の方程式は $f(x,y)-z=0$ で与えられるので、その曲面上での単位法線ベクトル $\vec{n}(\vec{r})$ は、勾配 $\mathrm{grad}\,[f(x,y)-z]$ に比例することになる。つまり、

$$\vec{n}(\vec{r}) \propto \mathrm{grad}\,[f(x,y)-z] = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, -1 \right) \tag{35}$$

すなわち $n_y : n_z = \partial f(x,y)/\partial y : -1$ が成立する。これより、

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} n_z(\vec{r}) = -n_y(\vec{r}) \tag{36}$$

が得られる。この関係を (34) 式に代入すると、(29) 式が得られる。証明終わり。