§7 多変数関数の微積分

物理学では、独立変数が二つ以上の**多変数関数**を標準的に扱う。多変数関数の身近な例としては、xy 平面上の各点に高さ $z = f(x,y)$ が対応する「高度」が挙げられる。そして、各位置での山の「勾配」を求める「偏微分」や、登山道に沿って登った高さや歩いた距離を足し上げる「線積分」が重要な役割を果たす。今回は、これらの概念と計算の基礎を学習する。

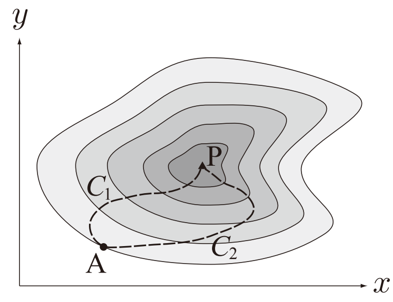


図 1: 等高線と登山道

1　偏微分

二変数関数 $f(x,y)$ の x 方向に関する偏微分を

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{1}$$

で定義する。すなわち、y を定数と見なして通常の x 微分を行うのである。図 1 での $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ は、点 (x,y) における山の斜面の $+x$ 方向の傾きを意味する。例として、$f(x,y) = x^2 y$ のとき、その偏微分は

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2$$

となる。高階の偏微分も同様に実行でき、次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}. \tag{2}$$

2　勾配と全微分

点 (x,y) における関数 $f(x,y)$ の x, y 方向の傾きを、まとめてベクトルで

$$\vec{\nabla} f(x,y) \equiv \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) \tag{3}$$

と表すと便利である。だたし $\vec{\nabla}$ は、

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{4}$$

で定義されたベクトル演算子で、ナブラと呼ばれる。(3) 式は簡略化して $\vec{\nabla} f$ とも書かれ、幾何学的には、高度 $f(x,y)$ を持つ山の位置 (x,y) における勾配を表す。この観点から、$\vec{\nabla} f$ は、「勾配」を意味する英単語「gradient」の最初の四文字を用いて、$\mathrm{grad}\, f$ のようにも表現される。

勾配 $\vec{\nabla} f$ を用いると、(x,y) から $(x+dx, y+dy)$ へと微小移動した際の “高さ”f の変化 df が、微小移動のベクトル

$$d\vec{r} \equiv (dx, dy) \tag{5}$$

と勾配 (3) を用いて、

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \tag{6}$$

と表せる。すなわち、微小移動に際しての“高度”変化 df は、勾配 $\vec{\nabla} f$ と移動ベクトル $d\vec{r}$ とのスカラー積（内積）に等しい。この df を全微分と言う。特に、等高線に沿った微小移動 $d\vec{r}$ では、高度が変化しない ($df = 0$) ので、$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$ が成立する。これより、勾配ベクトル $\vec{\nabla} f$ は等高線に垂直であることがわかる。なお、(6) 式は、(dx, dy) が有限の変位 $(\Delta x, \Delta y)$ で置き換わった場合には成り立たない。しかし、その $(\Delta x, \Delta y)$ を無限小とすることで、等号が成立するようになるのである。

例として、$f(x,y) = x^2 y$ の場合には、勾配が $\vec{\nabla} f = (2xy, x^2)$, 全微分が $df = 2xy\, dx + x^2 dy$ である。

3 線積分

図 1 で、点 A から頂上 P まで登山道 C_1 に沿って登ることを考える。その際に歩いた距離や登った高さは、経路 C_1 に沿って微小な長さや高さを足し上げる（積分する）ことにより求まる。一般に、ある経路に沿った一次元積分を線積分と呼ぶ。ここでは曲線上の線積分についての理解をめざす。

まず、曲線は、数学的に一つのパラメータで表現できる。図 2 のような有限曲線 C を考えると、その曲線上の位置ベクトル $\vec{r}$ は、適当なパラメータ s を用いて、

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s)), \qquad s \in [s_0, s_1] \tag{7}$$

と表現できる。ただし $s \in [s_0, s_1]$ は $s_0 \le s \le s_1$ を表す。次に、曲線のパラメータ表示 (7) を用いて、C 上の線積分を

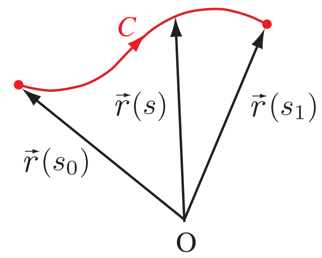


図 2:

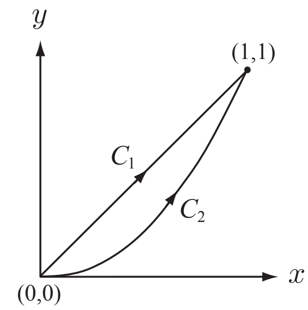
$$\int_C f\, ds \equiv \int_{s_0}^{s_1} f(x(s), y(s))\, ds \tag{8}$$

で定義する。表現は込み入っているが、高校で学ぶ定積分に他ならない。

例として、関数

$$f(x,y) = x + y$$

を、右図の二つの積分経路



$$\begin{aligned} &\text{直線} \quad C_1\colon\ (x,y) = (s,s) \\ &\text{放物線}\ C_2\colon\ (x,y) = (s,s^2) \end{aligned}$$

に沿って $(0,0)$ から $(1,1)$ まで線積分すると、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f\, ds &= \int_0^1 f(s,s)\, ds = \int_0^1 (s+s)\, ds = 1, \\ \int_{C_2} f\, ds &= \int_0^1 f(s,s^2)\, ds = \int_0^1 (s+s^2)\, ds = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

4　微分形式

(6) 式における勾配 $\vec{\nabla} f$ を、二つの独立な関数

$$\vec{F}(\vec{r}) \equiv (F_x(x,y), F_y(x,y)) \tag{9}$$

で置き換えたものを 微分形式 と呼び、次のように表すことにする。

$$d'W \equiv \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy. \tag{10}$$

$F_x(x,y)$ と $F_y(x,y)$ は二つの独立な関数で、下つき添字 x, y で区別されている。また、$d'W$ の d' は、(6) 式における df の d とは意味が異なるので、$'$ をつけて区別されている。

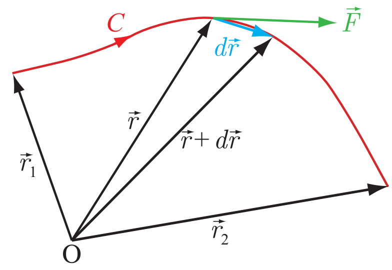
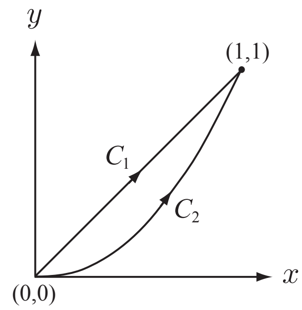


図 3: 力 $\vec{F}$ と微小変位 $d\vec{r}$

位置 $\vec{r}$ に依存するベクトル $\vec{F}(\vec{r})$ を ベクトル場 と呼ぶ。例えば台風が接近した時などの天気予報では、各地点での風の向きと大きさを表す速度場 $\boldsymbol{v}(\vec{r})$ が、地図上で矢印により可視化されて提供される。(10) 式は、$\vec{F}(\vec{r})$ が位置 $\vec{r}$ にある物体に働く力の場合、「物体が $\vec{r}$ から $\vec{r}+d\vec{r}$ と微小移動した際に、力 $\vec{F}$ が物体にした 仕事 という力学的意味を持つ（図 3 参照)。

関数 $\vec{F}(\vec{r})$ を任意に選んだ時、$d'W$ の線積分は一般にたどる道筋に依存するが、経路によらない場合もある。具体的に、$d'W$ を、原点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ へ、右図のような二つの経路 C_1 と C_2 に沿って線積分し、上の二つの場合があることを見て行こう。



例 1. $\vec{F}(\vec{r}) = (2y, x)$ の場合

(1) C_1 に沿った線積分

経路 C_1 上の点は、パラメータ $s \in [0,1]$ を用いて

$$(x,y) = (s,s)$$

と表せる。また、そこでの “力”$\vec{F} = (2y, x)$ と微小変位 $d\vec{r} = (dx, dy)$ は、それぞれ

$$\vec{F} = (2s, s), \qquad d\vec{r} = (ds, ds)$$

である。従って、経路上を $s \to s + ds$ と移動した時の “微小仕事”$d'W$ は、

$$d'W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2s\,ds + s\,ds = 3s\,ds.$$

これを 0 から 1 まで積分すると、C_1 に沿っての “全仕事”ΔW_1 が

$$\Delta W_1 \equiv \int_{C_1} d'W = \int_0^1 3s\,ds = \frac{3}{2} \tag{11a}$$

と求まる。

(2) C_2 に沿った線積分

経路 C_2 上の点は、パラメータ $s \in [0,1]$ を用いて

$$(x,y) = (s, s^2)$$

と表せる。また、そこでの "力"$\vec{F}=(2y,x)$ と微小変位 $d\vec{r}=(dx,dy)$ は、それぞれ

$$\vec{F}=(2s^2,s), \qquad d\vec{r}=(ds,2s\,ds)$$

である。従って、経路上を $s\to s+ds$ と移動した時の "微小仕事"$d'W$ は、

$$d'W=\vec{F}\cdot d\vec{r}=2s^2ds+2s^2ds=4s^2ds.$$

これを 0 から 1 まで積分すると、C_2 に沿っての "全仕事"ΔW_2 が

$$\Delta W_2\equiv\int_{C_2}d'W=\int_0^1 4s^2ds=\frac{4}{3} \tag{11b}$$

と求まる。

この場合、(11a) と (11b) の値は一致しない。

例 2. $\vec{F}(\vec{r})=(2xy,x^2)$ の場合

(1) C_1 に沿った線積分

経路 C_1 上の点は、パラメータ $s\in[0,1]$ を用いて

$$(x,y)=(s,s)$$

と表せる。また、そこでの "力"$\vec{F}=(2xy,x^2)$ と微小変位 $d\vec{r}=(dx,dy)$ は、それぞれ

$$\vec{F}=(2s^2,s^2), \qquad d\vec{r}=(ds,ds)$$

である。従って、経路上を $s\to s+ds$ と移動した時の "微小仕事"$d'W$ は、

$$d'W=\vec{F}\cdot d\vec{r}=2s^2ds+s^2ds=3s^2ds.$$

これを 0 から 1 まで積分すると、C_1 に沿っての "全仕事"ΔW_1 が

$$\Delta W_1\equiv\int_{C_1}d'W=\int_0^1 3s^2ds=1 \tag{12a}$$

と求まる。

(2) C_2 に沿った線積分

経路 C_2 上の点は、パラメータ $s\in[0,1]$ を用いて

$$(x,y)=(s,s^2)$$

と表せる。また、そこでの "力"$\vec{F}=(2xy,x^2)$ と微小変位 $d\vec{r}=(dx,dy)$ は、それぞれ

$$\vec{F}=(2s^3,s^2), \qquad d\vec{r}=(ds,2s\,ds)$$

である。従って、経路上を $s\to s+ds$ と移動した時の "微小仕事"$d'W$ は、

$$d'W=\vec{F}\cdot d\vec{r}=2s^3ds+2s^3ds=4s^3ds.$$

これを 0 から 1 まで積分すると、C_2 に沿っての "全仕事"ΔW_2 が

$$\Delta W_2\equiv\int_{C_2}d'W=\int_0^1 4s^3ds=1 \tag{12b}$$

と求まる。

今度は (12a) と (12b) の値が一致した。

それでは、線積分 $\int_C d'W$ が、経路によらず始点と終点の位置だけで決まるのは、どんな場合であろうか？

5　線積分が積分経路に依らないための必要十分条件

$$\int_C \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\text{が積分経路}\ C\ \text{に依らず} \quad \leftrightarrows \quad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} \tag{13}$$

証明は後回しにして、まず、上の例 1 と例 2 でこの主張の正否を具体的に確かめる。

例 1. $\vec{F}(\vec{r}) = (2y, x)$ の場合

この場合には、(11a) と (11b) のように、積分値は経路に依って異なっていた。そこで、(13) における微分式の左辺と右辺を計算してみると、

$$\frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = 2, \qquad \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} \tag{14a}$$

となり、確かに等式が成立しない。

例 2. $\vec{F}(\vec{r}) = (2xy, x^2)$ の場合

この場合には、(12a) と (12b) のように、積分値は経路に依らず同じであった。そこで、(13) における微分式の左辺と右辺を計算してみると、

$$\frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x}. \tag{14b}$$

となり、確かに等式が成立している。

このように、(13) 式の主張は、例 1 と例 2 で成立している。

$d'W \equiv F_x(\vec{r})dx + F_y(\vec{r})dy$ が $\dfrac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x}$ を満たす時、この微分形式を完全微分と呼び、$d'W \to dW$ と書き換えることにする。完全微分 dW は積分可能である。なぜなら、適当な基準点 $\vec{r}_0 \equiv (x_0, y_0)$ を選んで、

$$W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dW \tag{15}$$

で点 $\vec{r} \equiv (x, y)$ の積分値を定義すれば、その値は経路によらず、一つに決まるからである。そして、$\vec{F}(\vec{r})$ は、

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} W(\vec{r}) \tag{16}$$

を満たす、すなわち、$\vec{F}(\vec{r})$ は関数 $W(\vec{r})$ の勾配に他ならない。

例として、$\vec{F}(\vec{r}) = (2xy, x^2)$ に関する完全微分 $dW = \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ を、原点 $(0,0)$ を基準点として積分し、関数 $W(x,y)$ を求める。便利な積分経路として、原点から (x,y) までの直線経路 C_1 を選ぶ。C_1 上の一般の点 $\vec{r}_1$ は、

$$\vec{r}_1 = (xs_1, ys_1), \qquad s_1 \in [0,1]$$

と表せる。また、この点での“力”$\vec{F}(\vec{r}_1)$ と微小変位 $d\vec{r}_1 = (dx_1, dy_1)$ は、それぞれ

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = (2xys_1^2, x^2s_1^2), \qquad d\vec{r}_1 = (x\,ds_1, y\,ds_1)$$

と得られる。従って、経路上を $s_1 \to s_1 + ds_1$ と移動した時の“微小仕事”は、

$$dW = \vec{F}(\vec{r}_1) \cdot d\vec{r}_1 = 2x^2ys_1^2ds_1 + x^2ys_1^2ds_1 = 3x^2ys_1^2ds_1.$$

これを 0 から 1 まで積分すると、関数 $W(x, y)$ が

$$W(x, y) = \int_{C_1} dW = x^2y \int_0^1 3s_1^2ds_1 = x^2y$$

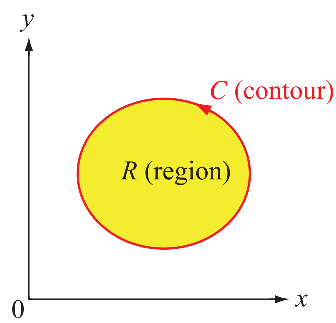
と求まる。

6 (13) 式の証明

以下では、(13) 式の証明を行う。証明は、(i) 「グリーンの定理」の証明、(ii) (13) 式の証明、の二段階で行う。やや高度な内容であるが、興味のある人は追ってみよう。

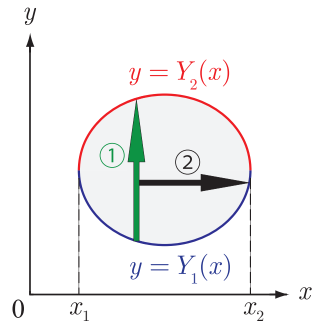
6.1 グリーンの定理

定理の内容は、次の通りである。



$$\oint_C (F_xdx + F_ydy) = \iint_R dxdy \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \tag{17}$$

左辺は、経路 C に沿った反時計回りの一周線積分を表し、また、右辺は、領域 R における二重積分である。その詳しい内容は以下の証明で明らかにする。

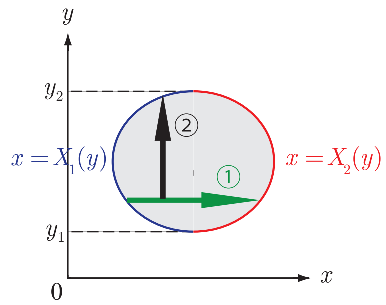


証明

まず、(17) 式右辺第二項の領域 R についての積分を、右図のように、x を決めて縦方向（y 方向）に積分した後、横方向に x 積分を実行し、次のように変形する。

$$
\begin{aligned}
&-\iint_R dxdy \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \\
&= -\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} dy \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \\
&\quad \text{（y 積分は容易に実行できる）} \\
&= -\int_{x_1}^{x_2} dx \Big[F_x(x, Y_2(x)) - F_x(x, Y_1(x)) \Big] \\
&\quad \text{（第一項で積分の下限と上限を入れ替え）} \\
&= \int_{x_2}^{x_1} dx F_x(x, Y_2(x)) + \int_{x_1}^{x_2} dx F_x(x, Y_1(x)) \\
&\quad \text{（これは C に沿った反時計回りの線積分）} \\
&= \oint_C F_x(x, y)dx \qquad (18a)
\end{aligned}
$$

次に、(17) 式右辺第一項の領域 R についての積分を、右図のように、y を決めて横方向（x 方向）に積分した後、縦方向に y 積分を実行し、次のように変形する。

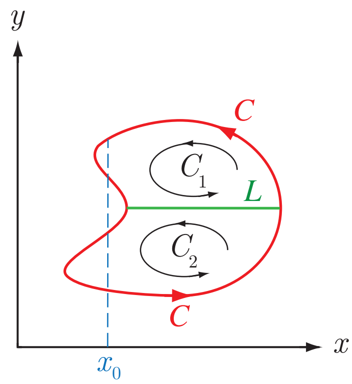


$$
\begin{aligned}
&\iint_R dxdy \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} dx \frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x} \\
&= \int_{y_1}^{y_2} dy \Big[F_y(X_2(y),y) - F_y(X_1(y),y)\Big] \\
&= \int_{y_1}^{y_2} dy F_y(X_2(y),y) + \int_{y_2}^{y_1} dy F_y(X_1(y),y) \\
&= \oint_C F_y(x,y) dy
\end{aligned}
\tag{18b}
$$

(18a) 式と (18b) 式を辺々加えあわせると定理が得られる。証明終り。

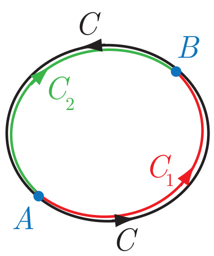
6.2 より一般的な閉曲線の場合

上の証明は、一つの x に高々 2 つの $y = Y_1(x), Y_2(x)$ が対応する「二価関数」の場合を扱っている。従って、例えば右図のように、ある $x = x_0$ について、C 上の 4 つの値が対応する「四価関数」の場合には、証明はそのままでは適用できない。しかし、適当な直線 L を引いて C を閉曲線 C_1 と C_2 に分割して、それぞれに上の証明が成立するようにできる。挿入した L 上の線積分は、C_1 と C_2 で逆向きとなって相殺される。従って、$C = C_1 + C_2$ についても定理は成立することになる。さらに一般的な多価関数の閉曲線の場合も、同様の議論で定理の成立を示せる。



6.3 (13) 式の証明

グリーンの定理 (17) における右辺の一周線積分 C を、右図の経路 C_1 と C_2 上の線積分の和として表すと、C_2 が C と逆向きであることを考慮して、(17) 式は



$$
\int_{C_1} (F_x dx + F_y dy) - \int_{C_2} (F_x dx + F_y dy) = \iint_R \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \tag{19}
$$

へと書き換えられる。この (19) 式と閉曲線 C が任意に選べることより、

$$
\left(R \text{ 内で } \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \text{ が成立} \right) \leftrightarrows \left(\int_{C_1} = \int_{C_2} \text{ が任意の } C_1 \text{ と } C_2 \text{ で成立} \right)
$$

が成り立つことがわかる。証明終り。