7　多変数関数の微積分

物理学では，独立変数が二つ以上の**多変数関数**を標準的に扱う．多変数関数の身近な例としては，xy 平面上の各点に高さ $z = f(x, y)$ が対応する「高度」が挙げられる．そして，各位置での山の「勾配」を求める「偏微分」や，登山道に沿って登った高さや歩いた距離を足し上げる「線積分」が重要な役割を果たす．今回は，これらの概念と計算の基礎を学習する．

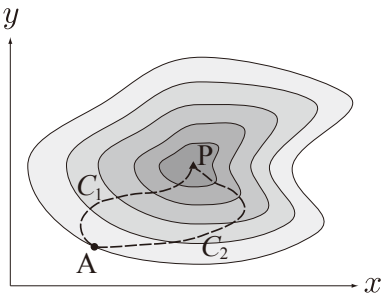


図 7.1: 等高線と登山道

7.1　偏微分

二変数関数 $f(x, y)$ の x 方向に関する**偏微分**を

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{7.1}$$

で定義する．すなわち，y を定数と見なして通常の x 微分を行うのである．図 7.1 での $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ は，点 (x, y) における山の斜面の $+x$ 方向の傾きを意味する．例として，$f(x, y) = x^2 y$ のとき，その偏微分は

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2$$

となる．高階の偏微分も同様に実行でき，次のように表される．

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}. \tag{7.2}$$

7.2　勾配と全微分

点 (x, y) における関数 $f(x, y)$ の x, y 方向の傾きを，まとめてベクトルで

$$\vec{\nabla} f(x,y) \equiv \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) \tag{7.3}$$

と表すと便利である．だたし $\vec{\nabla}$ は，

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{7.4}$$

で定義されたベクトル演算子で，**ナブラ**と呼ばれる．(7.3) 式は簡略化して $\vec{\nabla} f$ とも書かれ，幾何学的には，高度 $f(x, y)$ を持つ山の位置 (x, y) における**勾配**を表す．この観点から，$\vec{\nabla} f$ は，「勾配」を意味する英単語「gradient」の最初の四文字を用いて，$\mathrm{grad}\, f$ のようにも表現される．

勾配 $\vec{\nabla} f$ を用いると，(x, y) から $(x + dx, y + dy)$ へと微小移動した際の “高さ” f の変化 df が，微小移動のベクトル

$$d\vec{r} \equiv (dx, dy) \tag{7.5}$$

と勾配 (7.3) を用いて，

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy \tag{7.6}$$

と表せる．すなわち，微小移動に際しての “高度” 変化 df は，勾配 $\vec{\nabla} f$ と移動ベクトル $d\vec{r}$ とのスカラー積（内積）に等しい．この df を**全微分**と言う．特に，等高線に沿った微小移動 $d\vec{r}_{\parallel}$ では，高度が変化しない ($df = 0$) ので，$\vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}_{\parallel} = 0$ が成立する．これより，「勾配ベクトル $\vec{\nabla} f$ は等高線に垂直である」ことがわかる．なお，(7.6) 式は，(dx, dy) が有限の変位 $(\Delta x, \Delta y)$ で置き換わった場合には成り立たない．しかし，その $(\Delta x, \Delta y)$ を無限小とすることで，等号が成立するようになるのである．

例として，$f(x,y) = x^2 y$ の場合には，勾配が $\vec{\nabla} f = (2xy, x^2)$，全微分が $df = 2xy\, dx + x^2 dy$ である．

7.3 線積分

図 7.1 で，点 A から頂上 P まで登山道 C_1 に沿って登ることを考える．その際に歩いた距離や登った高さは，経路 C_1 に沿って微小な長さや高さを足し上げる（積分する）ことにより求まる．一般に，ある経路に沿った一次元積分を**線積分**と呼ぶ．ここでは曲線上の線積分についての理解をめざす．

まず，曲線は，数学的に一つのパラメータで表現できる．図 7.2 のような有限曲線 C を考えると，その曲線上の位置ベクトル $\vec{r}$ は，適当なパラメータ s を用いて，

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s)), \qquad s \in [s_0, s_1] \tag{7.7}$$

と表現できる．ただし $s \in [s_0, s_1]$ は $s_0 \le s \le s_1$ を表す．次に，曲線のパラメータ表示 (7.7) を用いて，C 上の線積分を

$$\int_C f\, ds \equiv \int_{s_0}^{s_1} f(x(s), y(s))\, ds \tag{7.8}$$

で定義する．表現は込み入っているが，高校で学ぶ定積分に他ならない．

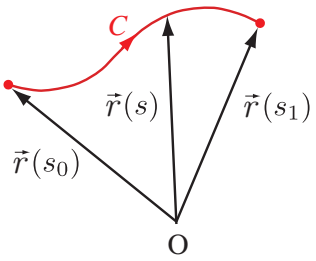


図 7.2:

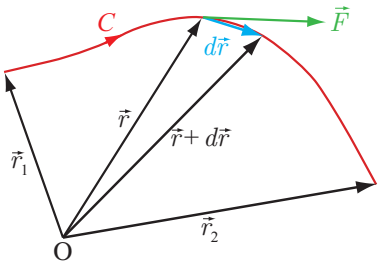
7.4 微分形式

(7.6) 式における勾配 $\vec{\nabla} f$ を，二つの独立な関数

$$\vec{F}(\vec{r}) \equiv (F_x(x,y), F_y(x,y)) \tag{7.9}$$

で置き換えたものを**微分形式**と呼び，次のように表すことにする．

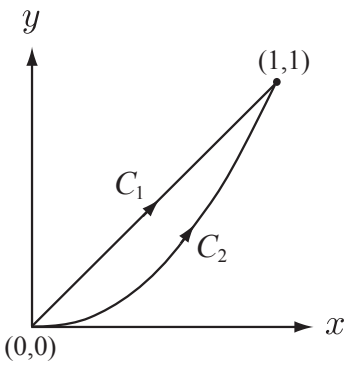
$$d'W \equiv \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x(x,y)\, dx + F_y(x,y)\, dy. \tag{7.10}$$



$F_x(x,y)$ と $F_y(x,y)$ は二つの独立な関数で，下つき添字 x, y で区別されている．また，$d'W$ の d' は，(7.6) 式における df の d とは意味が異なるので，$'$ をつけて区別されている．

位置 $\vec{r}$ に依存するベクトル $\vec{F}(\vec{r})$ を**ベクトル場**と呼ぶ．例えば台風が接近した時などの天気予報では，各地点での風の向きと大きさを表す速度場 $\boldsymbol{v}(\vec{r})$ が，地図上で矢印により可視化されて提供される．(7.10) 式は，$\vec{F}(\vec{r})$ が位置 $\vec{r}$ にある物体に働く力の場合，「物体が $\vec{r}$ から $\vec{r}+d\vec{r}$ と微小移動した際に，力 $\vec{F}$ が物体にした**仕事**という力学的意味を持つ．

関数 $\vec{F}(\vec{r})$ を任意に選んだ時，$d'W$ の線積分は一般にたどる道筋に依存するが，経路によらない場合もある．具体的に，$d'W$ を，原点 $(0,0)$ から点 $(1,1)$ へ，右図のような二つの経路 C_1 と C_2 に沿って線積分し，上の二つの場合があることを見て行こう．まず，経路 C_1 と経路 C_2 上の点 $\vec{r}\equiv(x,y)$ とそこからの無限小変位 $d\vec{r}\equiv(dx,dy)$ は，パラメータ $t\in[0,1]$ を用いて，それぞれ



$$C_1:\ \vec{r}=(t,t),\qquad d\vec{r}=(dt,dt),\tag{7.11a}$$
$$C_2:\ \vec{r}=(t,t^2),\qquad d\vec{r}=(dt,2tdt),\tag{7.11b}$$

と表せる．(7.11b) 式の $d\vec{r}$ の y 成分は，差 $(t+dt)^2-t^2=2tdt+(dt)^2$ から無限小量の二乗 $(dt)^2$ を落とすことで得られた．この操作は，dt が無限小であることから正当化される．以上の準備のもとに，線積分を実行しよう．

例 1. $\vec{F}(\vec{r})=(2y,x)$ の場合

C_1 上の点 $(x,y)=(t,t)$ で受ける力は，$\vec{F}(\vec{r})=(2y,x)$ に $(x,y)=(t,t)$ を代入して，

$$\vec{F}=(2t,t)$$

と表せる．これと (7.11a) 式の $d\vec{r}=(dt,dt)$ との内積を取って $d'W$ を構成し，$t\in[0,1]$ について積分する．具体的に，経路 C_1 に沿った仕事が，次のように求まる．

$$\Delta W_1\equiv\int_{C_1}d'W=\int_0^1(2t\cdot dt+t\cdot dt)=\int_0^1 3t\,dt=\frac{3}{2}.\tag{7.12a}$$

一方，C_2 上の一般点は $(x,y)=(t,t^2)$ とパラメータ表示でき，そこで受ける力は，$\vec{F}(\vec{r})=(2y,x)$ より

$$\vec{F}=(2t^2,t)$$

と表せる．これと (7.11b) 式の $d\vec{r}=(dt,2tdt)$ との内積を取って $d'W$ を構成し，$t\in[0,1]$ について積分する．以上を実行すると，経路 C_2 に沿った仕事が，次のように計算できる．

$$\Delta W_2\equiv\int_{C_2}d'W=\int_0^1(2t^2\cdot dt+t\cdot 2tdt)=\int_0^1 4t^2\,dt=\frac{4}{3}.\tag{7.12b}$$

このように，$\vec{F}(\vec{r})=(2y,x)$ の場合，ΔW_1 と ΔW_2 は一致しない．

例 2. $\vec{F}(\vec{r})=(2xy,x^2)$ の場合

C_1 上の点 $(x,y)=(t,t)$ で受ける力は，$\vec{F}(\vec{r})=(2xy,x^2)$ に $(x,y)=(t,t)$ を代入して，

$$\vec{F}=(2t^2,t^2)$$

と表せる．これと (7.11a) 式の $d\vec{r} = (dt, dt)$ との内積を取って $d'W$ を構成し，$t \in [0,1]$ について積分する．具体的に，経路 C_1 に沿った仕事が，次のように求まる．

$$\Delta W_1 \equiv \int_{C_1} d'W = \int_0^1 (2t^2 \cdot dt + t^2 \cdot dt) = \int_0^1 3t^2\, dt = 1. \tag{7.13a}$$

一方，C_2 上の点 $(x, y) = (t, t^2)$ で受ける力は，

$$\vec{F} = (2t^3, t^2)$$

と表せる．これと (7.11b) 式の $d\vec{r} = (dt, 2tdt)$ との内積を取って $d'W$ を構成し，$t \in [0,1]$ について積分する．以上を実行すると，経路 C_2 に沿った仕事が，

$$\Delta W_2 \equiv \int_{C_2} d'W = \int_0^1 (2t^3 \cdot dt + t^2 \cdot 2tdt) = \int_0^1 4t^3\, dt = 1 \tag{7.13b}$$

と計算できる．今回は ΔW_1 と ΔW_2 の値が一致した．

それでは，線積分 $\int_C d'W$ が，経路によらず始点と終点の位置だけで決まるのは，どんな場合であろうか？

7.5 線積分が積分経路に依らないための必要十分条件

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}\text{が積分経路 } C \text{ に依らず} \quad \leftrightarrows \quad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} \tag{7.14}$$

証明は後回しにして，まず，上の例 1 と例 2 でこの主張の正否を具体的に確かめる．

例 1. $\vec{F}(\vec{r}) = (2y, x)$ の場合

この場合には，(7.12a) と (7.12b) のように，積分値は経路に依って異なっていた．そこで，(7.14) における微分式の左辺と右辺を計算してみると，次のようになる．

$$\frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = 2, \qquad \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x}. \tag{7.15a}$$

例 2. $\vec{F}(\vec{r}) = (2xy, x^2)$ の場合

この場合には，(7.13a) と (7.13b) のように，積分値は経路に依らず同じであった．そこで，(7.14) における微分式の左辺と右辺を計算してみると，次のようになる．

$$\frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = \frac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x}. \tag{7.15b}$$

このように，(7.14) 式の主張は，例 1 と例 2 で成立している．

$d'W \equiv F_x(\vec{r})dx + F_y(\vec{r})dy$ が $\dfrac{\partial F_x(\vec{r})}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y(\vec{r})}{\partial x}$ を満たす時，この微分形式を**完全微分**と呼び，$d'W \to dW$ と書き換えることにする．完全微分 dW は積分可能である．なぜなら，適当な基準点 $\vec{r}_0 \equiv (x_0, y_0)$ を選んで，

$$W(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} dW \tag{7.16}$$

で点 $\vec{r} \equiv (x, y)$ の積分値を定義すれば，その値は経路によらず，一つに決まるからである．そして，$\vec{F}(\vec{r})$ は，

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} W(\vec{r}) \tag{7.17}$$

を満たす，すなわち，$\vec{F}(\vec{r})$ は関数 $W(\vec{r})$ の勾配に他ならない．

例として，$\vec{F}(\vec{r}) = (2xy, x^2)$ に関する完全微分 $dW = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ を，原点 $(0, 0)$ を基準点として積分し，関数 $W(x, y)$ を求める．便利な積分経路として，原点から (x, y) までの直線経路 C を選ぶ．この経路上での関連するベクトルは，パラメータ t を用いて，

$$\begin{cases} \vec{r} = (xt, yt), \quad 0 \le t \le 1 \\ d\vec{r} = (xdt, ydt) \\ \vec{F} = (2xyt^2, x^2t^2) \end{cases} \longrightarrow \quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3x^2yt^2dt$$

と表せる．従って，原点を基準点とする (x, y) の関数としての $W(x, y)$ が，次のように得られる．

$$W(x, y) = \int_C dW = 3x^2y \int_0^1 t^2 dt = x^2y. \tag{7.18}$$

7.6 (7.14) 式の証明

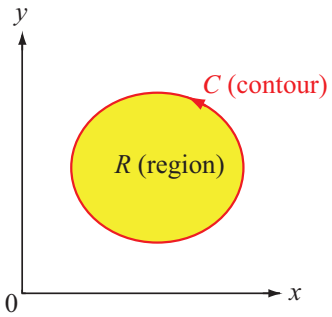
以下では，(7.14) 式の証明を行う．証明は，(i)「グリーンの定理」の証明，(ii) (7.14) 式の証明，の二段階で行う．やや高度な内容であるが，興味のある人は追ってみよう．

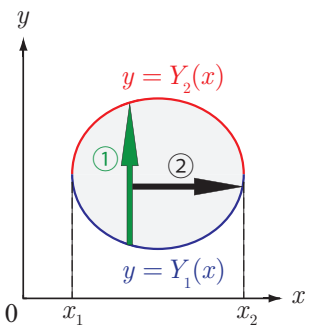
7.6.1 グリーンの定理

定理の内容は，次の通りである．

$$\oint_C (F_x dx + F_y dy) = \iint_R dxdy \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \tag{7.19}$$

左辺は，経路 C に沿った反時計回りの一周線積分を表し，また，右辺は，領域 R における二重積分である．その詳しい内容は以下の証明で明らかにする．



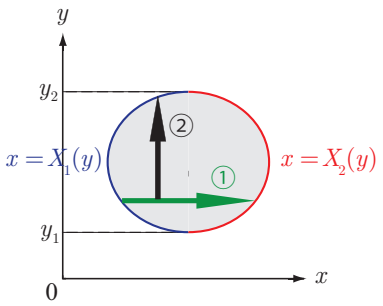


証明　まず，(7.19) 式右辺第二項の領域 R についての積分を，右図のように，x を決めて縦方向（y 方向）に積分した後，横方向

に x 積分を実行し，次のように変形する．

$$
\begin{aligned}
&-\iint_R dxdy\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\\
&=-\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)}dy\frac{\partial F_x(x,y)}{\partial y}\\
&\qquad（y\text{ 積分は容易に実行できる}）\\
&=-\int_{x_1}^{x_2}dx\big[F_x(x,Y_2(x))-F_x(x,Y_1(x))\big]\\
&\qquad（\text{第一項で積分の下限と上限を入れ替え}）\\
&=\int_{x_2}^{x_1}dxF_x(x,Y_2(x))+\int_{x_1}^{x_2}dxF_x(x,Y_1(x))\\
&\qquad（\text{これは } C \text{ に沿った反時計回りの線積分}）\\
&=\oint_C F_x(x,y)dx \qquad (7.20a)
\end{aligned}
$$

次に，(7.19) 式右辺第一項の領域 R についての積分を，右図のように，y を決めて横方向（x 方向）に積分した後，縦方向に y 積分を実行し，次のように変形する．

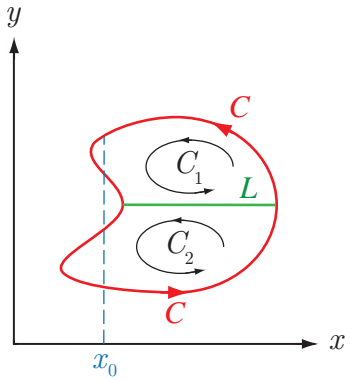


$$
\begin{aligned}
&\iint_R dxdy\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}=\int_{y_1}^{y_2}dy\int_{X_1(y)}^{X_2(y)}dx\frac{\partial F_y(x,y)}{\partial x}\\
&=\int_{y_1}^{y_2}dy\big[F_y(X_2(y),y)-F_y(X_1(y),y)\big]\\
&=\int_{y_1}^{y_2}dyF_y(X_2(y),y)+\int_{y_2}^{y_1}dyF_y(X_1(y),y)\\
&=\oint_C F_y(x,y)dy \qquad (7.20b)
\end{aligned}
$$

(7.20a) 式と (7.20b) 式を辺々加えあわせると定理が得られる． ■

7.6.2　より一般的な閉曲線の場合

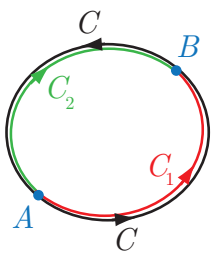
上の証明は，一つの x に高々 2 つの $y=Y_1(x),Y_2(x)$ が対応する「二価関数」の場合を扱っている．従って，例えば右図のように，ある $x=x_0$ について，C 上の 4 つの値が対応する「四価関数」の場合には，証明はそのままでは適用できない．しかし，適当な直線 L を引いて C を閉曲線 C_1 と C_2 に分割して，それぞれに上の証明が成立するようにできる．挿入した L 上の線積分は，C_1 と C_2 で逆向きとなって相殺される．従って，$C=C_1+C_2$ についても定理は成立することになる．さらに一般的な多価関数の閉曲線の場合も，同様の議論で定理の成立を示せる．



7.6.3　(7.14) 式の証明

グリーンの定理 (7.19) における右辺の一周線積分 C を，右図の経路 C_1 と C_2 上の線積分の和として表すと，C_2 が C と逆向きであることを考慮して，(7.19) 式は

$$
\int_{C_1}(F_xdx+F_ydy)-\int_{C_2}(F_xdx+F_ydy)=\iint_R\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \qquad (7.21)
$$



へと書き換えられる．この (7.21) 式と閉曲線 C が任意に選べることより，

$$\left(R \text{ 内で } \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \text{ が成立}\right) \leftrightarrows \left(\int_{C_1} = \int_{C_2} \text{ が任意の } C_1 \text{ と } C_2 \text{ で成立}\right)$$

が成り立つことがわかる． ■