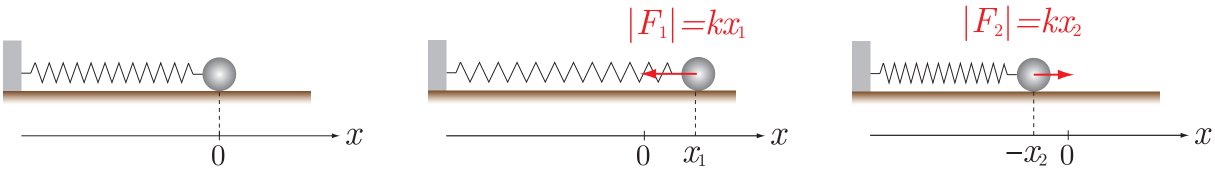
§6 エネルギー保存則

物理学においては**エネルギー保存則**という重要な法則が成立することが知られている。力学におけるこの保存則は、**力学的エネルギー保存則**と呼ばれている。ここでは、(i) フックの法則に従う弾性力と (ii) 重力を取り上げ、力学的エネルギー保存則が成立していることを具体的に見ていく。さらに、エネルギー保存則に関連した**仕事**の概念を、ニュートンの運動方程式に基づいて導入する。

1 弾性力におけるエネルギー保存則

再び、バネにつけた質点の単振動を考察する。下図 (a) のように、バネの一端に質量 m の質点をつけて摩擦のない滑らかな床面に置き、他端をバネが床面に平行になるように壁に固定する。次に、この質点を引っ張ったり伸ばしたりして、バネの長さを図 (b) や (c) のように自然長から変化させる。すると、質点には、バネの自然長からの変位 x の大きさに比例した**弾性力**が働く。そしてその方向は、バネを自然長に戻す向きであることが知られている。



(a) 自然長　(b) 伸びた状態　(c) 縮んだ状態

この**フックの法則**は、弾性定数 $k>0$ を用いて、数式で

$$F=-kx \tag{1}$$

と表すことができる。実際、伸び x が正の時は F は負となり、力が x 軸の負の方向に向いていることを表現できている。また、伸び x が負の時（縮んだ状態）には F は正となり、力が x 軸の正の方向に向いている。

(1) 式をニュートンの運動方程式 $ma=F$ の右辺に代入し、加速度を $a=\dfrac{dv}{dt}$ と表すと、

$$m\frac{dv}{dt}=-kx \tag{2}$$

が得られる。この質点の運動に関して、次の量 E を導入する。

$$E\equiv\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2. \tag{3}$$

記号 $\equiv$ は定義式を表す。この E は、弾性力による運動の 力学的エネルギー と呼ばれ、また、右辺の第一項と第二項は、それぞれ 運動エネルギー および ポテンシャルエネルギー と名づけられている。この E は任意の時間で一定の値を持ち続ける。すなわち E は保存する。

証明 1
(3) 式の両辺を時間 t で微分し、m と k が定数であることを考慮し、次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=\frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dt}+\frac{1}{2}k\frac{d(x^2)}{dt}=mv\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}=mv\frac{dv}{dt}+kxv\\&=v\left(m\frac{dv}{dt}+kx\right)=0.\end{aligned}$$

最後の等式では (2) 式を用いた。証明終わり。

証明 2
(2) 式の両辺に v をかけると、次の等式が得られる。

$$m\frac{dv}{dt}v = -kxv \quad\longleftrightarrow\quad mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt} \quad\longleftrightarrow\quad 0 = \frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dt} + \frac{k}{2}\frac{d(x^2)}{dt}$$

この両辺を $t \in [t_1, t_2]$ について積分し、次のように変形する。

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d(v^2)}{dt}dt + \frac{k}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d(x^2)}{dt}dt \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{第 1 項で } t \to v^2 \\ \text{第 2 項で } t \to x^2 \end{array}\right. \text{と変数変換} \\
&= \frac{m}{2}\int_{v_1^2}^{v_2^2} d(v^2) + \frac{k}{2}\int_{x_1^2}^{x_2^2} d(x^2) \\
&= \frac{m}{2}\left[v^2\right]_{v_1^2}^{v_2^2} + \frac{k}{2}\left[x^2\right]_{x_1^2}^{x_2^2} \\
&= \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)
\end{aligned}$$

これより、

$$\frac{m}{2}v_1^2 + \frac{k}{2}x_1^2 = \frac{m}{2}v_2^2 + \frac{k}{2}x_2^2$$

が成立する。すなわち、任意の異なる時刻 t_1 と t_2 について、エネルギー (3) は等しく保たれる。証明終わり。

　例として、バネを自然長から A だけ伸ばし、初期時刻 $t = 0$ において静かに離す状況を考える。この場合の $x = 0$ での質点の速さ v は、エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m0^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k0^2$$

より、

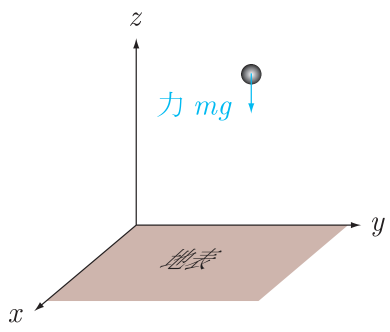
$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A, \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

と得られる。このように、運動方程式 (2) を解くことなく、$x = 0$ での質点の速さが求まった。この結果は、同じ初期条件で解いた第 4 回 (10) 式の結果

$$x(t) = A\cos\omega t, \qquad v(t) = -\omega A\sin\omega t \tag{4}$$

と一致する。つまり、$x(t) = 0$ となる時刻 $t = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ において、$v(t)$ の絶対値が最大値 ωA をとるのである。

2　重力による運動でのエネルギー保存則



次に重力による運動を取り上げる。地表から鉛直上方に z 軸を取り、重力を、その方向も含めて

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (0, 0, -mg) \\ &= -mg\vec{e}_z \end{aligned} \tag{5}$$

と表す。ここで $\vec{e}_z \equiv (0, 0, 1)$ は z 軸方向の単位ベクトルである。この重力下での質量 m の質点は、ニュートンの運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$、すなわち、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\vec{e}_z \tag{6}$$

に従って運動する。ただし、質点の位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$、速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$、加速度 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ の間には、

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \tag{7}$$

の関係がある。

この質点の運動においては、

$$E \equiv \frac{1}{2}mv^2 + mgz \qquad \left(v^2 \equiv \vec{v}\cdot\vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \tag{8}$$

が一定の値をとり変化しない。すなわち保存する。この E は重力場における**力学的エネルギー**である。(8) 式右辺の第一項と第二項を、それぞれ**運動エネルギー**および**ポテンシャルエネルギー**と呼ぶ。

証明
(8) 式の両辺を時間 t で微分し、m と g が定数であることを考慮し、次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} + mgz\right) \\ &= \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} + mg\frac{dz}{dt} \\ &= \frac{1}{2}m\frac{d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{dt} + mgv_z \\ &= \frac{1}{2}m\left(2\frac{dv_x}{dt}v_x + 2\frac{dv_y}{dt}v_y + 2\frac{dv_z}{dt}v_z\right) + mg\vec{e}_z\cdot\vec{v} \\ &= \frac{1}{2}m\,2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + mg\vec{e}_z\cdot\vec{v} \\ &= \left(m\frac{d\vec{v}}{dt} + mg\vec{e}_z\right)\cdot\vec{v} \\ &= 0.\end{aligned}$$

最後の等式では、運動方程式 (6) を用いた。よって E は時間変化しない。証明終わり。

上の証明では、等式

$$\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} \tag{9}$$

が成立していることも証明されている。この式は、$\dfrac{d(y^2)}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$ を、内積（スカラー積）の場合に拡張した式である。

例えば、地表から $h = 20\text{m}$ の高さにおいて、質量 m のボールを静かに離す場合を考える。空気抵抗が無視できるとすると、地表に到達する際のボールの速さ v は、高さ 20m の所と地表におけるエネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}m0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg0 \quad \longleftrightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

より、

$$v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2 \times 10 \times 20} = 20\,\text{m/s} = \frac{20 \times 10^{-3}}{\dfrac{1}{60 \times 60}}\,\text{km/h} = 72\,\text{km/h}$$

と計算できる。

3 仕事

前の二つの節では、弾性力・重力の場合について、エネルギー保存則が成立していることを確かめた。この考察を一般化し、どのような場合にエネルギー保存則が成り立つのかを考えていこう。その準備として、仕事の概念を、ニュートンの運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$、すなわち

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{10}$$

に基づいて導入する。(10) 式と速度 $\vec{v}$ とのスカラー積を取ると、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

が得られる。さらに、(9) 式と $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ を用いると、

$$\frac{m}{2}\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

へと変形できる。そして、$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ と書き換えたのち、$t \in [t_1, t_2]$ について積分すると、

$$\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d(v^2)}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

となる。ここで、左辺と右辺でそれぞれ変数変換 $t \to v^2$、$t \to \vec{r}$ を行うと、

$$\frac{m}{2}\int_{v_1^2}^{v_2^2} d(v^2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

すなわち

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{11}$$

が得られる。この左辺は、時刻 t_1 から t_2 の間における運動エネルギーの変化である。この変化をもたらす右辺を記号 $\Delta W_{1\to 2}$ で表し、仕事と呼ぶことにする。すなわち、仕事 $\Delta W_{1\to 2}$ は、

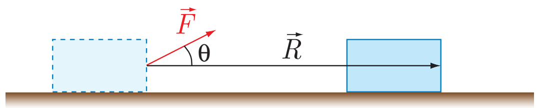
$$\Delta W_{1\to 2} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{12}$$

で定義されている。仕事の単位は、エネルギーと同じジュール [J] である。

例えば、図のように、一定の力 $\vec{F}$ で、ベクトル $\vec{R}$ で表される直線距離だけ荷物を移動させた場合の仕事は、$\vec{F}$ と $\vec{R}$ のなす角を θ として、

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\vec{R} = FR\cos\theta \tag{13}$$

と表せる。このように、力 $\vec{F}$ のうち、移動方向と垂直な成分は仕事に寄与しない。



一般に、仕事をする経路は直線とは限らない。山道に沿って荷物を運び上げていくような場合がその例である。(12) 式の積分は、そのような場合にも有効である。そして、その数学的内容は、下図のように、ある経路 (contour) C に沿って、微小量 $d'W \equiv \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を $\vec{r}_1$ から $\vec{r}_2$ まで足し上げていく線積分と呼ばれるものである。線積分の詳細は次回に説明する。