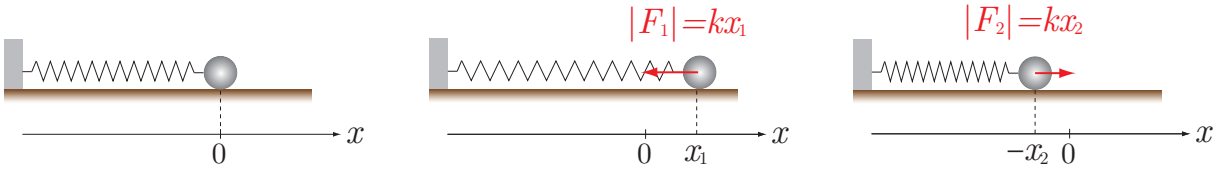
6　エネルギー保存則

物理学においては**エネルギー保存則**という重要な法則が成立することが知られている．力学におけるこの保存則は，**力学的エネルギー保存則**と呼ばれている．ここでは，(i) フックの法則に従う弾性力と (ii) 重力を取り上げ，力学的エネルギー保存則が成立していることを具体的に見ていく．さらに，エネルギー保存則に関連した**仕事**の概念を，ニュートンの運動方程式に基づいて導入する．

6.1　弾性力におけるエネルギー保存則

再び，バネにつけた質点の単振動を考察する．下図 (a) のように，バネの一端に質量 m の質点をつけて摩擦のない滑らかな床面に置き，他端をバネが床面に平行になるように壁に固定する．次に，この質点を引っ張ったり伸ばしたりして，バネの長さを図 (b) や (c) のように自然長から変化させる．すると，質点には，バネの自然長からの変位 x の大きさに比例した**弾性力**が働く．そしてその方向は，バネを自然長に戻す向きであることが知られている．



(a) 自然長　　(b) 伸びた状態　　(c) 縮んだ状態

この**フックの法則**は，弾性定数 $k>0$ を用いて，数式で

$$F=-kx \tag{6.1}$$

と表すことができる．実際，伸び x が正の時は F は負となり，力が x 軸の負の方向に向いていることを表現できている．また，伸び x が負の時（縮んだ状態）には F は正となり，力が x 軸の正の方向に向いている．

(6.1) 式をニュートンの運動方程式 $ma=F$ の右辺に代入し，加速度を $a=\dfrac{dv}{dt}$ と表すと，

$$m\frac{dv}{dt}=-kx \tag{6.2}$$

が得られる．この質点の運動に関して，次の量 E を導入する．

$$E\equiv\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2. \tag{6.3}$$

記号 $\equiv$ は定義式を表す．この E は，弾性力による運動の**力学的エネルギー**と呼ばれ，また，右辺の第一項と第二項は，それぞれ**運動エネルギー**および**ポテンシャルエネルギー**と名づけられている．この E は任意の時間で一定の値を持ち続ける．すなわち E は保存する．

証明　(6.3) 式を t で微分した式は，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} && \frac{dx}{dt} = v \\ &= v\left(m\frac{dv}{dt} + kx\right) && \text{(6.2) 式を代入} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって，E は時間に依存しない定数である．　■

例として，バネを自然長から A だけ伸ばし，初期時刻 $t = 0$ において静かに離す状況を考える．この場合の $x = 0$ での質点の速さ v は，エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}m0^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k0^2$$

より，

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A, \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

と得られる．このように，運動方程式 (6.2) を解くことなく，$x = 0$ での質点の速さが求まった．この結果は，同じ初期条件で解いた第 4 回 (10) 式の結果

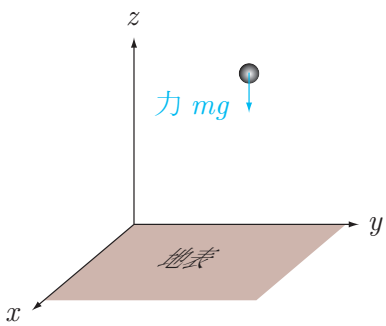
$$x(t) = A\cos\omega t, \qquad v(t) = -\omega A\sin\omega t \tag{6.4}$$

と一致する．つまり，$x(t) = 0$ となる時刻 $t = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ において，$v(t)$ の絶対値が最大値 ωA をとるのである．

6.2　重力による運動でのエネルギー保存則

次に重力による運動を取り上げる．地表から鉛直上方に z 軸を取り，重力を，その方向も含めて

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (0, 0, -mg) \\ &= -mg\vec{e}_z\end{aligned} \tag{6.5}$$



と表す．ここで $\vec{e}_z \equiv (0, 0, 1)$ は z 軸方向の単位ベクトルである．この重力下での質量 m の質点は，ニュートンの運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$，すなわち，

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\vec{e}_z \tag{6.6}$$

に従って運動する．ただし，質点の位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$，速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$，加速度 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ の間には，

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}, \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \tag{6.7}$$

の関係がある．

この質点の運動においては，

$$E \equiv \frac{1}{2}mv^2 + mgz \qquad \left(v^2 \equiv \vec{v}\cdot\vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \tag{6.8}$$

が一定の値をとり変化しない．すなわち保存する．この E は重力場における**力学的エネルギー**である．(6.8) 式右辺の第一項と第二項を，それぞれ**運動エネルギー**および**ポテンシャルエネルギー**と呼ぶ．

<u>証明</u>　(6.8) 式の両辺を時間 t で微分し，m と g が定数であることを考慮し，次のように変形する．

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} + mgz\right) \\
&= \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} + mg\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{1}{2}m\frac{d(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{dt} + mgv_z \\
&= \frac{1}{2}m\left(2\frac{dv_x}{dt}v_x + 2\frac{dv_y}{dt}v_y + 2\frac{dv_z}{dt}v_z\right) + mg\vec{e}_z\cdot\vec{v} \\
&= \frac{1}{2}m\,2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + mg\vec{e}_z\cdot\vec{v} \\
&= \left(m\frac{d\vec{v}}{dt} + mg\vec{e}_z\right)\cdot\vec{v} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

最後の等式では，運動方程式 (6.6) を用いた．よって E は時間変化しない．　■

上の証明では，等式

$$\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} \tag{6.9}$$

が成立していることも証明されている．この式は，$\dfrac{d(y^2)}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$ を，内積（スカラー積）の場合に拡張した式である．

例えば，地表から $h = 20\mathrm{m}$ の高さにおいて，質量 m のボールを静かに離す場合を考える．空気抵抗が無視できるとすると，地表に到達する際のボールの速さ v は，高さ 20m の所と地表におけるエネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}m0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg0 \quad \longleftrightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

より，

$$v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2\times 10\times 20} = 20\,\mathrm{m/s} = \frac{20\times 10^{-3}}{\dfrac{1}{60\times 60}}\,\mathrm{km/h} = 72\,\mathrm{km/h}$$

と計算できる．

6.3 仕事

前の二つの節では，弾性力・重力の場合について，エネルギー保存則が成立していることを確かめた．この考察を一般化し，どのような場合にエネルギー保存則が成り立つのかを考えていこう．その準備として，**仕事**の概念を，ニュートンの運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$，すなわち

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{6.10}$$

に基づいて導入する．(6.10) 式と速度 $\vec{v}$ とのスカラー積を取ると，

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

が得られる．さらに，(6.9) 式と $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ を用いると，

$$\frac{m}{2}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

へと変形できる．そして，$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$ と書き換えたのち，$t \in [t_1, t_2]$ について積分すると，

$$\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d(v^2)}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

となる．ここで，左辺と右辺でそれぞれ変数変換 $t \to v^2$，$t \to \vec{r}$ を行うと，

$$\frac{m}{2}\int_{v_1^2}^{v_2^2} d(v^2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

すなわち

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{6.11}$$

が得られる．この左辺は，時刻 t_1 から t_2 の間における運動エネルギーの変化である．この変化をもたらす右辺を記号 $\Delta W_{1\to 2}$ で表し，**仕事**と呼ぶことにする．すなわち，仕事 $\Delta W_{1\to 2}$ は，

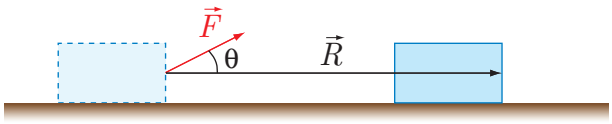
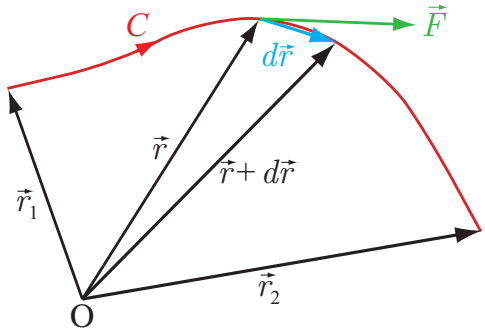
$$\Delta W_{1\to 2} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{6.12}$$

で定義されている．仕事の単位は，エネルギーと同じジュール [J] である．

例えば，図のように，一定の力 $\vec{F}$ で，ベクトル $\vec{R}$ で表される直線距離だけ荷物を移動させた場合の仕事は，$\vec{F}$ と $\vec{R}$ のなす角を θ として，

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\vec{R} = FR\cos\theta \tag{6.13}$$

と表せる．このように，力 $\vec{F}$ のうち，移動方向と垂直な成分は仕事に寄与しない．



一般に，仕事をする経路は直線とは限らない．山道に沿って荷物を運び上げていくような場合がその例である．(6.12) 式の積分は，そのような場合にも有効である．そして，その数学的内容は，右図のように，ある経路 (contour) C に沿って，微小量 $d'W \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を $\vec{r}_1$ から $\vec{r}_2$ まで足し上げていく**線積分**と呼ばれるものである．線積分の詳細は次回に説明する．