

§5 振動 (その2)

1 振動の減衰

前回の授業では、摩擦のない理想的な場合の振動を考察した。その振動は、一定の周期と振幅で、無限に続くと言われる。しかし、現実の系では必ず摩擦力が働き、振動の減衰が起こることを我々は経験から知っている。そこで、振動に対する摩擦力の効果を考察する。

1.1 粘性抵抗のある振動の運動方程式

減衰の効果を考察するために、図のように、質量 m の質点がばね定数 k のバネに繋がれ、水中に置かれている場合を取り上げる。質点が空中にある場合でも減衰は生じるが、粘性抵抗がはるかに大きい水中に置く方が、その効果をより短時間で明瞭に観測できる。鉛直下向きに x 軸を取り、バネの自然長の位置をその原点に選ぶ。質点には、図に示した重力 (gravity)

$$F_g \equiv mg,$$

と、フックの法則に従う弾性力 (elastic force)

$$F_e \equiv -kx$$

の他に、速度 v に比例する水からの粘性抵抗 (viscous resistance)

$$F_v = -bv \quad (b > 0)$$

が働くものとする。その場合のニュートンの運動方程式は、

$$\begin{aligned} ma &= F_g + F_e + F_v \\ &= mg - kx - bv \end{aligned} \quad (1)$$

である。理論面での減衰の効果は、上の運動方程式を数学的に解くことで明らかになる。

まず、質点が静止する位置 x_0 を求めよう。その値は、上の式で $(x, v, a) = (x_0, 0, 0)$ と置いた式 $0 = mg - kx_0$ より、 $x_0 = \frac{mg}{k}$ と求まる。この x_0 を用いて (1) を書き換えると、

$$ma = k(x_0 - x) - bv \quad (2)$$

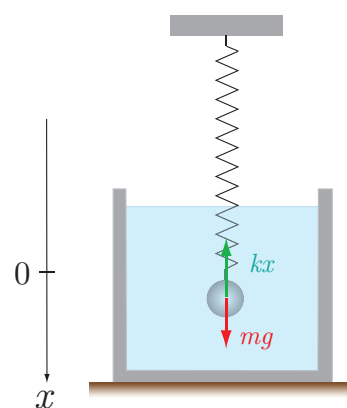
となる。ここで、静止位置からの質点の変位

$$\bar{x} \equiv x - x_0 \quad (3a)$$

を導入すると、速度 v と加速度 a は、

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\bar{x} + x_0)}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \quad (3b)$$

のように、 \bar{x} のみを用いて表せる。定数 x_0 は導関数には影響しないからである。



(3) 式を (2) 式に代入すると、運動方程式が、

$$m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = -k \bar{x} - b \frac{d\bar{x}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{k}{m} \bar{x} = 0$$

へと書き換えられる。さらに、第二の式を、新たな定数

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma \equiv \frac{b}{2m} > 0 \quad (4)$$

を用いて表すと、

$$\hat{L} \bar{x} = 0, \quad \hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (5)$$

となる。方程式 (5) には、 \bar{x} とその導関数に関する一次の項のみが現れる。この特徴を持つ微分方程式を **線型微分方程式**、微分演算を含む \hat{L} を **線型演算子** (linear operator) と呼ぶ。 ω_0 は粘性抵抗がない場合 ($\gamma = 0$) の振動の角周波数である。

1.2 運動方程式を解く

運動方程式 (5) は、前回と同様に、次のようにして解くことができる。まず、解を

$$\bar{x}(t) = Ae^{\lambda t} \quad (6)$$

と表せるものと仮定する。この関数は、指数関数に関する微分の性質 $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ から、

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \lambda \bar{x}, \quad \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \lambda \bar{x} = \lambda \frac{d\bar{x}}{dt} = \lambda^2 \bar{x}$$

を満たす。この関係を (5) 式に代入すると、

$$0 = \hat{L} \bar{x} = (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) \bar{x} \quad (7)$$

が得られる。すなわち、もとの微分方程式が、代数方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

に書き換えられた。この代数方程式の解と元の微分方程式 (5) の二つの独立解 \bar{x}_j ($j = 1, 2$) は、判別式 $D/4 \equiv \gamma^2 - \omega_0^2$ の正負によって、下の表のようにまとめられる。ここで $\omega_0 > \gamma$ の場合には、

判別式	ω_0 と γ の大小	$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ の解	$\hat{L} \bar{x} = 0$ の二つの独立解 \bar{x}_1, \bar{x}_2
$D < 0$	$\omega_0 > \gamma$ (弱摩擦)	$-\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -\gamma \pm i\omega$	$e^{(-\gamma+i\omega)t}, e^{(-\gamma-i\omega)t}$ $e^{-\gamma t} \cos \omega t, e^{-\gamma t} \sin \omega t$
$D = 0$	$\omega_0 = \gamma$ (臨界摩擦)	$-\gamma$ (重解)	$e^{-\gamma t}, te^{-\gamma t}$ ¹
$D > 0$	$\omega_0 < \gamma$ (強摩擦)	$-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv -\gamma \pm p$	$e^{(-\gamma+p)t}, e^{(-\gamma-p)t}$

¹この場合の独立解が $e^{-\gamma t}$ と $te^{-\gamma t}$ であることの証明は §3 に与えた。

オイラーの公式 $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ を用いて、独立解を二つの表し方で与えてある。すなわち、 $(e^{-\gamma t} e^{i\omega t}, e^{-\gamma t} e^{-i\omega t})$ の組と共に、それらの異なる線形結合

$$e^{-\gamma t} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad e^{-\gamma t} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = e^{-\gamma t} \sin \omega t$$

も独立解として使えるのである。そして、 $(e^{-\gamma t} \cos \omega t, e^{-\gamma t} \sin \omega t)$ の組は、実数であるという利点がある。

微分方程式 $\hat{L}\bar{x} = 0$ の一般解は、各々の場合の二つの独立解と二つの積分定数 A_j を用いて、次のように表せる。

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) \quad (8)$$

証明

\bar{x}_j ($j = 1, 2$) は

$$\hat{L}\bar{x}_j = 0$$

を満たす。これを用いると、(8) 式の \bar{x} に微分演算子 \hat{L} を作用させた結果が、 A_j が定数であることに注意して、

$$\hat{L}\bar{x} = \hat{L}(A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2) = A_1 \hat{L}\bar{x}_1 + A_2 \hat{L}\bar{x}_2 = A_1 \times 0 + A_2 \times 0 = 0$$

と変形できる。証明終わり。

$t = 0$ における初期条件を

$$\bar{x}(0) = A, \quad v(0) = 0 \quad (9)$$

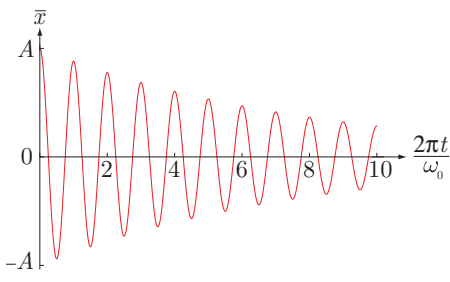
と選び、各々の場合について (A_1, A_2) の組を決めると、対応する解が次のように求まる。

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} Ae^{-\gamma t} \left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t \right) & : \omega_0 > \gamma \\ A(1 + \gamma t)e^{-\gamma t} & : \omega_0 = \gamma \\ \frac{A}{2} \left\{ \frac{\gamma + p}{p} e^{(-\gamma+p)t} - \frac{\gamma - p}{p} e^{(-\gamma-p)t} \right\} & : \omega_0 < \gamma \end{cases} \quad (10)$$

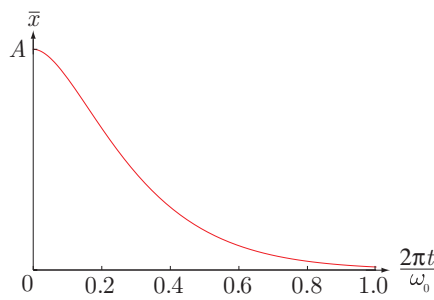
これらの解の振る舞いを、それぞれ、**減衰振動** ($\omega_0 > \gamma > 0$)、**臨界減衰** ($\omega_0 = \gamma$)、**過減衰** ($\omega_0 < \gamma$) という。下図に三つの場合のグラフを示す。摩擦が小さい $\gamma < \omega_0$ の場合には、振動の振幅が減衰していく。振動の周期も、減衰のない場合の値 $T_0 \equiv \frac{2\pi}{\omega_0}$ から少しずれて、 $T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ へと変

化し長くなっている。一方、摩擦が大きくなって $\gamma \geq \omega_0$ の領域に入ると、振動は見られなくなる。

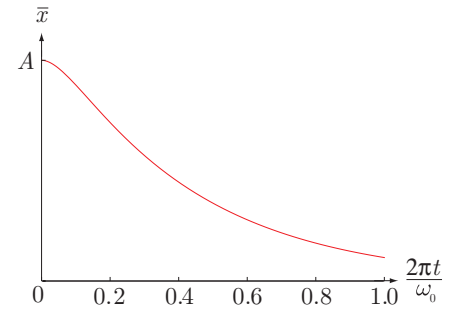
このようにして、摩擦の影響で振動が減衰していくという日常経験が、粘性抵抗を取り入れた計算により再現・確認された。



(a) $\gamma/\omega_0 = 0.02$ (減衰振動)



(b) $\gamma/\omega_0 = 1.0$ (臨界減衰)

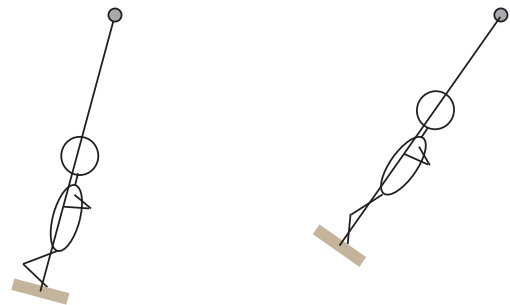


(c) $\gamma/\omega_0 = 1.5$ (過減衰)

2 強制振動

ブランコは単振り子の一種であり、小さく揺らした時の角周波数 ω_0 と周期 T は、ブランコの長さ l と重力加速度 g を用いて、それぞれ $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ および $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ と表せる。例えば長さが 2.0m のブランコの周期 T は、 $T \approx 2\pi\sqrt{2/9.8} \approx 2.8$ [s] と評価できる。

このブランコに乗り、振動の周期に合わせて膝の曲げ伸ばしを行うと、振れ幅を大きくできるのをよくご存知であろう。これは、振動の周期と同じ外力を外から加えて固有振動を増幅する **共振** を行っているのである。共振の物理を理解することは、ビルや橋などの建造に際しても基本的な重要性がある。地震が来た時に、共振が起こらないように設計することが必要なのである。共振は、外から一定周期の力を加えて振動を起こす **強制振動** (forced vibration) の一種である。ここでは、この強制振動の物理を学ぼう。



(a) 最下点付近で膝を曲げる

(b) 上端付近で膝を伸ばす

ブランコでの強制振動

2.1 強制振動の運動方程式

前節で考察した系に、角周波数 ω_f の外力

$$F_f = F_0 \cos \omega_f t \quad (11)$$

を余分に加える。その場合の運動方程式は、(1) 式の右辺に F_f を加えた式

$$\begin{aligned} ma &= F_g + F_e + F_v + F_f \\ &= mg - kx - bv + F_0 \cos \omega_f t \\ &= k(x_0 - x) - bv + F_0 \cos \omega_f t \end{aligned}$$

となる。この両辺を m で割り、静止位置からの変位 $\bar{x} \equiv x - x_0$ を用いて書き換えると、

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{k}{m} \bar{x} = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

が得られる。右辺がつけ加わった外力であり、前節の考察からの変更点である。この方程式は、(5)式と同様に、

$$\hat{L}\bar{x} = f_0 \cos \omega_f t, \quad (12)$$

$$\hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2, \quad f_0 \equiv \frac{F_0}{m} \quad (13)$$

と表すことができる。(12)式の右辺は、求めたい関数 \bar{x} とは無関係の既知関数で、外から加える力を表している。数学ではこの項を非斉次項と呼ぶ。

2.2 運動方程式の解

非斉次項が加わった(12)式は、次のように解くことができる。まず、

$$\hat{L}\bar{x}_p = f_0 \cos \omega_f t, \quad \hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (14)$$

を満たすひとつの解 $\bar{x}_p(t)$ 、すなわち特殊解(particular solution)を、何らかの方法で見つける。すると、(12)式の一般解は、すでに求めた斉次方程式

$$\hat{L}\bar{x}_j = 0 \quad (15)$$

の二つの独立解 \bar{x}_j ($j = 1, 2$)と積分定数 A_j を用いて、次のように表せる。

$$\bar{x}(t) = A_1\bar{x}_1(t) + A_2\bar{x}_2(t) + \bar{x}_p(t) \quad (16)$$

証明

(16)式に \hat{L} を作用させ、 $\hat{L}\bar{x}_j = 0$ と $\hat{L}\bar{x}_p = f_0 \cos \omega_f t$ を用いると、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \hat{L}\bar{x} &= \hat{L}(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + \bar{x}_p) = A_1\hat{L}\bar{x}_1 + A_2\hat{L}\bar{x}_2 + \hat{L}\bar{x}_p = A_1 \times 0 + A_2 \times 0 + f_0 \cos \omega_f t \\ &= f_0 \cos \omega_f t \end{aligned}$$

従って、任意定数を二つ持つ関数(16)は、二階微分方程式(12)式の一般解である。証明終わり。

(14)式の特殊解を求める。そのために、非斉次項を、

$$f_0 \cos \omega_f t = \operatorname{Re} f_0 (\cos \omega_f t + i \sin \omega_f t) = \operatorname{Re} f_0 e^{i\omega_f t} \quad (17)$$

と表すと便利である。ここで、 Re は、実部のみを残す操作を表す。次に、特殊解も、外力と同じ角周波数 ω_f で振動すること、すなわち、

$$\bar{x}_p(t) = \operatorname{Re} C e^{i\omega_f t} \quad (18)$$

の形を持つことを仮定する。ただし、 C は未定の複素定数である。そして、微分演算子 \hat{L} と実部を取る演算子 Re は、作用させる順序が可換であることに注意する。すると、(14)式の左辺が、

$$\begin{aligned} \hat{L}\bar{x}_p &= \hat{L}(\operatorname{Re} C e^{i\omega_f t}) = \operatorname{Re} C \hat{L} e^{i\omega_f t} = \operatorname{Re} C \left\{ (i\omega_f)^2 + 2i\gamma\omega_f + \omega_0^2 \right\} e^{i\omega_f t} \\ &= \operatorname{Re} C (\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f) e^{i\omega_f t} \end{aligned}$$

と変形できる。この式と (17) 式を (14) 式に代入すると、

$$\operatorname{Re} C \left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f \right) e^{i\omega_f t} = \operatorname{Re} f_0 e^{i\omega_f t} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{Re} \left[C \left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f \right) - f_0 \right] e^{i\omega_f t} = 0$$

が得られる。この式より、複素定数 C が

$$C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2i\gamma\omega_f} = f_0 \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2 - 2i\gamma\omega_f}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2} = f_0 A e^{-i\theta} \quad (19)$$

と求まる。ただし、実定数 A と θ は、次式で定義されている。

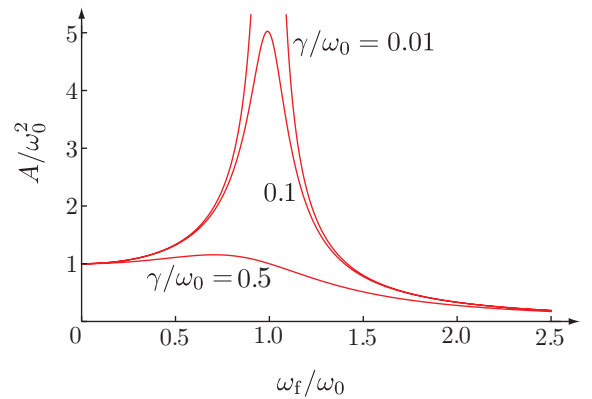
$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{2\gamma\omega_f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}. \quad (20)$$

実際、(i) (19) 式の最後から二番目の式が $f_0 A e^{-i\theta} = f_0 A (\cos \theta - i \sin \theta)$ に一致し、(ii) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ が成立することを確認できる。

(19) 式を (18) 式に代入すると、特殊解が

$$\begin{aligned} \bar{x}_p(t) &= \operatorname{Re} f_0 A e^{i(\omega_f t - \theta)} = f_0 A \cos(\omega_f t - \theta) \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}} \cos(\omega_f t - \theta) \end{aligned} \quad (21)$$

と得られる。右図は、規格化された振幅 A/ω_0^2 を角振動の比 ω_f/ω_0 の関数として、 $\gamma/\omega_0 = 0.01, 0.1, 0.5$ の場合に描いたグラフである。外力の角周波数 ω_f が固有振動数 ω_0 に近づくにつれて振幅は増大する。また、その増大は、摩擦が小さいほど顕著になることがわかる。この $\omega_f \sim \omega_0$ における強制振動の増大が共振である。



3 補足—判別式が重解の場合の独立解

ここでは、 $\omega_0 = \gamma$ が成立する場合の (5) 式、すなわち

$$\hat{L}\bar{x} = 0, \quad \hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \gamma^2 \quad (22)$$

の独立解が、 $e^{-\gamma t}$ と $t e^{-\gamma t}$ であることを証明する。(22) 式の左辺 $\hat{L}\bar{x}$ に

$$\bar{x} = A e^{\lambda t}$$

を代入すると、

$$\hat{L} A e^{\lambda t} = (\lambda + \gamma)^2 A e^{\lambda t} \quad (23a)$$

となる。この式の両辺を λ で微分すると、それぞれ

$$\frac{d}{d\lambda} \text{左辺} = \frac{d}{d\lambda} \hat{L} A e^{\lambda t} = \hat{L} A \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t} = \hat{L} A t e^{\lambda t}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \text{右辺} = \frac{d}{d\lambda} \left\{ (\lambda + \gamma)^2 A e^{\lambda t} \right\} = A \left\{ 2(\lambda + \gamma) e^{\lambda t} + (\lambda + \gamma)^2 t e^{\lambda t} \right\} = A (\lambda + \gamma) e^{\lambda t} \{ 2 + (\lambda + \gamma) t \}$$

が得られる。そして、「もともと **左辺=右辺** が成立していたのであるから、それらを λ で微分したのも等しい」ことに注意すると、上の二式から、等式

$$\hat{L}Ate^{\lambda t} = A(\lambda + \gamma)e^{\lambda t} \{2 + (\lambda + \gamma)t\} \quad (23b)$$

が成立することがわかる。(23a) 式と (23b) 式で、 $\lambda = -\gamma$ と置くと、それぞれ

$$\hat{L}Ae^{-\gamma t} = 0, \quad \hat{L}Ate^{-\gamma t} = 0 \quad (24)$$

が得られる。すなわち、 $e^{-\gamma t}$ と $te^{-\gamma t}$ が、 $\omega_0 = \gamma$ が成立する場合の二つの独立解であることがわかった。証明終わり。