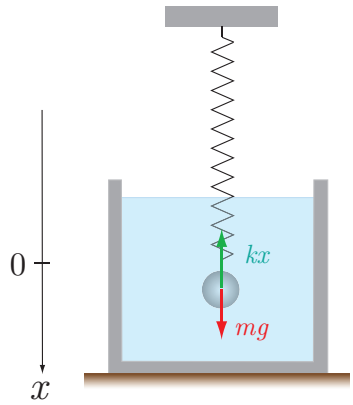
5　振動（その２）

5.1　振動の減衰

前回の授業では，摩擦のない理想的な場合の振動を考察した．その振動は，一定の周期と振幅で，無限に続くと予言される．しかし，現実の系では必ず摩擦力が働き，振動の減衰が起こることを我々は経験から知っている．そこで，振動に対する摩擦力の効果を考察する．

5.1.1　粘性抵抗のある振動の運動方程式

減衰の効果を考察するために，図のように，質量 m の質点がばね定数 k のバネに繋がれ，水中に置かれている場合を取り上げる．質点が空気中にある場合でも減衰は生じるが，粘性抵抗がはるかに大きい水中に置く方が，その効果をより短時間で明瞭に観測できる．鉛直下向きに x 軸を取り，バネの自然長の位置をその原点に選ぶ．質点には，図に示した重力 (gravity)



$$F_{\mathrm{g}} \equiv mg$$

と，フックの法則に従う弾性力 (elastic force)

$$F_{\mathrm{e}} \equiv -kx$$

の他に，速度 v に比例する水からの粘性抵抗 (viscous resistance)

$$F_{\mathrm{v}} = -bv \qquad (b > 0)$$

が働くものとする．その場合のニュートンの運動方程式は，

$$\begin{aligned} ma &= F_{\mathrm{g}} + F_{\mathrm{e}} + F_{\mathrm{v}} \\ &= mg - kx - bv \end{aligned} \tag{5.1}$$

である．理論面での減衰の効果は，上の運動方程式を数学的に解くことで明らかになる．

まず，質点が静止する位置 x_0 を求めよう．その値は，上の式で $(x, v, a) = (x_0, 0, 0)$ と置いた式 $0 = mg - kx_0$ より，$x_0 = \dfrac{mg}{k}$ と求まる．この x_0 を用いて (5.1) を書き換えると，

$$ma = k(x_0 - x) - bv \tag{5.2}$$

となる．ここで，静止位置からの質点の変位

$$\bar{x} \equiv x - x_0 \tag{5.3a}$$

を導入すると，速度 v と加速度 a は，

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\bar{x} + x_0)}{dt} = \frac{d\bar{x}}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} \tag{5.3b}$$

のように，$\bar{x}$ のみを用いて表せる．定数 x_0 は導関数には影響しないからである．

(5.3) 式を (5.2) 式に代入すると，運動方程式が，

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = -k\bar{x} - b\frac{d\bar{x}}{dt} \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{k}{m}\bar{x} = 0$$

へと書き換えられる．さらに，第二の式を，新たな定数

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \gamma \equiv \frac{b}{2m} > 0 \tag{5.4}$$

を用いて表すと，

$$\hat{L}\bar{x} = 0, \qquad \hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \tag{5.5}$$

となる．方程式 (5.5) には，$\bar{x}$ とその導関数に関する一次の項のみが現れる．この特徴を持つ微分方程式を**線型微分方程式**，微分演算を含む $\hat{L}$ を**線型演算子** (linear operator) と呼ぶ．ω_0 は粘性抵抗がない場合 ($\gamma = 0$) の振動の角周波数である．

5.1.2 運動方程式を解く

運動方程式 (5.5) は，前回と同様に，次のようにして解くことができる．まず，解を

$$\bar{x}(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{5.6}$$

と表せるものと仮定する．この関数は，指数関数に関する微分の性質 $\dfrac{d}{dt}\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ から，

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \lambda\bar{x}, \qquad \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\lambda\bar{x} = \lambda\frac{d\bar{x}}{dt} = \lambda^2\bar{x}$$

を満たす．この関係を (5.5) 式に代入すると，

$$0 = \hat{L}\bar{x} = \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right)\bar{x} \tag{5.7}$$

が得られる．すなわち，もとの微分方程式が，代数方程式

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

に書き換えられた．この代数方程式の解と元の微分方程式 (5.5) の二つの基本解 $\bar{x}_j$ ($j = 1, 2$) は，判別式 $D/4 \equiv \gamma^2 - \omega_0^2$ の正負によって，次の表のようにまとめられる．ここで

判別式	ω_0 と γ の大小	$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$ の解	二つの基本解 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$
$D < 0$	$\omega_0 > \gamma$	$-\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv -\gamma \pm i\omega$	$\mathrm{e}^{(-\gamma+i\omega)t}$, $\mathrm{e}^{(-\gamma-i\omega)t}$ $\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega t$, $\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t$
$D = 0$	$\omega_0 = \gamma$	$-\gamma$ （重解）	$\mathrm{e}^{-\gamma t}$, $t\mathrm{e}^{-\gamma t}$ [1]
$D > 0$	$\omega_0 < \gamma$	$-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \equiv -\gamma \pm p$	$\mathrm{e}^{(-\gamma+p)t}$, $\mathrm{e}^{(-\gamma-p)t}$

$\omega_0 > \gamma$ の場合には，オイラーの公式 $\mathrm{e}^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$ を用いて，基本解を二つの表し方で与えてある．すなわち，$(\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{i\omega t}, \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{-i\omega t})$ の組と共に，それらの異なる線形結合

$$\mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2} = \mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega t, \qquad \mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}-\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2i} = \mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t$$

も基本解として使えるのである．そして，$(\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega t, \mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t)$ の組は，実数であるという利点がある．なお，$\omega_0 = \gamma$ の場合の基本解が $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ と $t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ であることの証明は §5.3 に与えた．

微分方程式 $\hat{L}\bar{x} = 0$ の一般解は，各々の場合の二つの基本解と二つの積分定数 A_j を用いて，

$$\bar{x}(t) = A_1\bar{x}_1(t) + A_2\bar{x}_2(t) \tag{5.8}$$

と表せる（以下の証明参照）．

<u>証明</u>　$\bar{x}_j$ $(j = 1, 2)$ は

$$\hat{L}\bar{x}_j = 0$$

を満たす．これを用いると，(5.8) 式の $\bar{x}$ に微分演算子 $\hat{L}$ を作用させた結果が，A_j が定数であることに注意して，

$$\hat{L}\bar{x} = \hat{L}(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2) = A_1\hat{L}\bar{x}_1 + A_2\hat{L}\bar{x}_2 = A_1 \times 0 + A_2 \times 0 = 0$$

と変形できる．　■

$t = 0$ における初期条件を

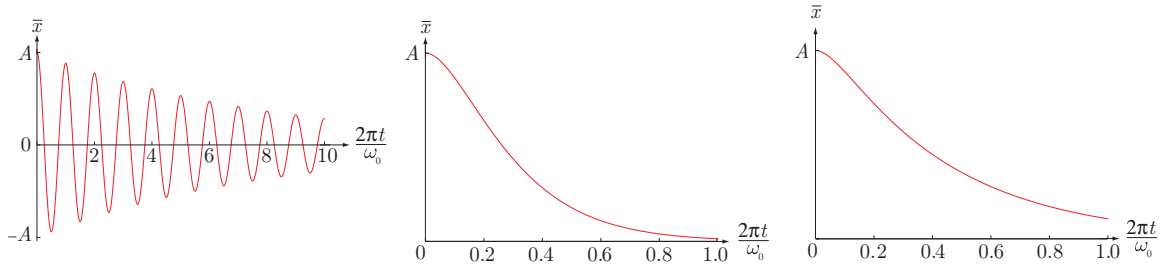
$$\bar{x}(0) = A, \qquad v(0) = 0 \tag{5.9}$$

と選び，各々の場合について (A_1, A_2) の組を決めると，対応する解が次のように求まる．

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} A\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \dfrac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right) & : \omega_0 > \gamma \\ A(1+\gamma t)\mathrm{e}^{-\gamma t} & : \omega_0 = \gamma \\ \dfrac{A}{2}\left\{\dfrac{\gamma+p}{p}\mathrm{e}^{(-\gamma+p)t} - \dfrac{\gamma-p}{p}\mathrm{e}^{(-\gamma-p)t}\right\} & : \omega_0 < \gamma \end{cases} \tag{5.10}$$

これらの解の振る舞いを，それぞれ，**減衰振動** $(\omega_0 > \gamma > 0)$，**臨界減衰** $(\omega_0 = \gamma)$，**過減衰** $(\omega_0 < \gamma)$ という．下図に三つの場合のグラフを示す．摩擦が小さい $\gamma < \omega_0$ の場合には，振動の振幅が減衰していく．振動の周期も，減衰のない場合の値 $T_0 \equiv \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ から少しずれて，$T \equiv \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$ へと変化し長くなっている．一方，摩擦が大きくなって $\gamma \geq \omega_0$ の領域に入ると，振動は見られなくなる．

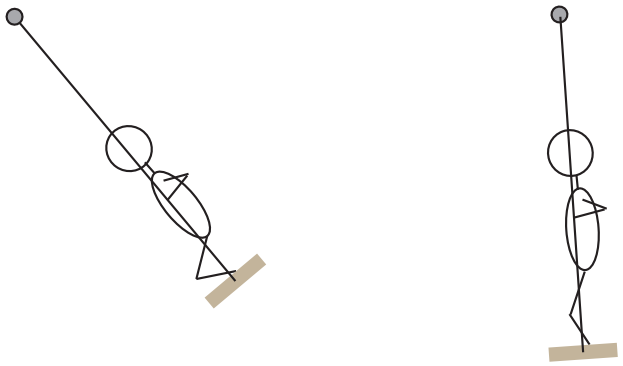
このようにして，摩擦の影響で振動が減衰していくという日常経験が，粘性抵抗を取り入れた計算により再現・確認された．



(a) $\gamma/\omega_0 = 0.02$ （減衰振動）　(b) $\gamma/\omega_0 = 1.0$ （臨界減衰）　(c) $\gamma/\omega_0 = 1.5$（過減衰）

5.2　強制振動

ブランコは単振り子の一種であり，小さく揺らした時の角周波数 ω_0 と周期 T は，ブランコの長さ ℓ と重力加速度 g を用いて，それぞれ $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ および $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ と表せる．例えば長さが 2.0m のブランコの周期 T は，$T \approx 2\pi\sqrt{2/9.8} \approx 2.8$ [s] と評価できる．



(a) 膝を曲げる　(b) 膝を伸ばす

ブランコでの強制振動

このブランコに乗り，振動の周期に合わせて膝の曲げ伸ばしを行うと，振れ幅を大きくできるのをよくご存知であろう．これは，振動の周期と同じ外力を外から加えて固有振動を増幅する**共振**を行っているのである．共振の物理を理解することは，ビルや橋などの建造に際しても基本的な重要性がある．地震が来た時に，共振が起こらないように設計することが必要なのである．共振は，外から一定周期の力を加えて振動を起こす**強制振動** (forced vibration) の一種である．ここでは，この強制振動の物理を学ぼう．

5.2.1　強制振動の運動方程式

前節で考察した系に，角周波数 ω_f の外力

$$F_\mathrm{f} = F_0 \cos \omega_\mathrm{f} t \tag{5.11}$$

を余分に加える．その場合の運動方程式は，(5.1) 式の右辺に F_f を加えた式

$$\begin{aligned} ma &= F_\mathrm{g} + F_\mathrm{e} + F_\mathrm{v} + F_\mathrm{f} \\ &= mg - kx - bv + F_0 \cos \omega_\mathrm{f} t \\ &= k(x_0 - x) - bv + F_0 \cos \omega_\mathrm{f} t \end{aligned}$$

となる．この両辺を m で割り，静止位置からの変位 $\bar{x} \equiv x - x_0$ を用いて書き換えると，

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{k}{m}\bar{x} = \frac{F_0}{m}\cos \omega_\mathrm{f} t$$

が得られる．右辺がつけ加わった外力であり，前節の考察からの変更点である．この方程式は，(5.5) 式と同様に，

$$\hat{L}\bar{x} = f_0 \cos \omega_{\mathrm{f}} t, \tag{5.12}$$

$$\hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2, \qquad f_0 \equiv \frac{F_0}{m} \tag{5.13}$$

と表すことができる．(5.12) 式の右辺は，求めたい関数 $\bar{x}$ とは無関係の既知関数で，外から加える力を表している．数学ではこの項を**非斉次項**と呼ぶ．

5.2.2 運動方程式の解

非斉次項が加わった (5.12) 式は，次のように解くことができる．まず，

$$\hat{L}\bar{x}_{\mathrm{p}} = f_0 \cos \omega_{\mathrm{f}} t, \qquad \hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \tag{5.14}$$

を満たすひとつの解 $\bar{x}_{\mathrm{p}}(t)$，すなわち**特殊解** (particular solution) を，何らかの方法で見つける．すると，(5.12) 式の一般解は，すでに求めた斉次方程式

$$\hat{L}\bar{x}_j = 0 \tag{5.15}$$

の二つの基本解 $\bar{x}_j$ $(j = 1, 2)$ と積分定数 A_j を用いて，

$$\bar{x}(t) = A_1 \bar{x}_1(t) + A_2 \bar{x}_2(t) + \bar{x}_{\mathrm{p}}(t) \tag{5.16}$$

と表せる（以下の証明参照）．

証明　(5.16) 式に $\hat{L}$ を作用させ，$\hat{L}\bar{x}_j = 0$ と $\hat{L}\bar{x}_{\mathrm{p}} = f_0 \cos \omega_{\mathrm{f}} t$ を用いると，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\hat{L}\bar{x} &= \hat{L}(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + \bar{x}_{\mathrm{p}}) = A_1\hat{L}\bar{x}_1 + A_2\hat{L}\bar{x}_2 + \hat{L}\bar{x}_{\mathrm{p}} = A_1 \times 0 + A_2 \times 0 + f_0 \cos \omega_{\mathrm{f}} t \\ &= f_0 \cos \omega_{\mathrm{f}} t\end{aligned}$$

従って，任意定数を二つ持つ関数 (5.16) は，二階微分方程式 (5.12) 式の一般解である．　■

(5.14) 式の特殊解を求める．そのために，非斉次項を，

$$f_0 \cos \omega_{\mathrm{f}} t = \mathrm{Re}\left\{f_0(\cos \omega_{\mathrm{f}} t + i \sin \omega_{\mathrm{f}} t)\right\} = \mathrm{Re}\left(f_0\, \mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}} t}\right) \tag{5.17}$$

と表すと便利である．ここで，Re は，実部のみを残す操作を表す．実際，このように余弦三角関数を指数関数の実部として表すと，指数関数が微分しても形を変えないため，微分方程式における振動の特殊解を求める操作が容易になる．次に，特殊解も，外力と同じ角周波数 ω_{f} で振動すること，すなわち，

$$\bar{x}_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{Re}\left(C\, \mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}} t}\right) \tag{5.18}$$

の形を持つことを仮定する．ただし，C は未定の複素定数である．そして，微分演算子 $\hat{L}$ と実部を取る演算子 Re は，作用させる順序が可換であることに注意する．すると，(5.14) 式の左辺が，

$$\begin{aligned}\hat{L}\bar{x}_{\mathrm{p}} &= \hat{L}\left\{\mathrm{Re}\left(C\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{C\hat{L}\,\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right\} = \mathrm{Re}\left[C\left\{(i\omega_{\mathrm{f}})^2 + 2i\gamma\omega_{\mathrm{f}} + \omega_0^2\right\}\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left\{C\left(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2 + 2i\gamma\omega_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right\}\end{aligned}$$

と変形できる．この式と (5.17) 式を (5.14) 式に代入すると，

$$\mathrm{Re}\left\{C\left(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2 + 2i\gamma\omega_{\mathrm{f}}\right)\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right\} = \mathrm{Re}\left(f_0\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right)$$

すなわち

$$\mathrm{Re}\left\{\left[C\left(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2 + 2i\gamma\omega_{\mathrm{f}}\right) - f_0\right]\mathrm{e}^{i\omega_{\mathrm{f}}t}\right\} = 0$$

が得られる．この式より，複素定数 C が

$$C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2 + 2i\gamma\omega_{\mathrm{f}}} = f_0\frac{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2 - 2i\gamma\omega_{\mathrm{f}}}{(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2)^2 + (2\gamma\omega_{\mathrm{f}})^2} = f_0 A\,\mathrm{e}^{-i\theta} \tag{5.19}$$

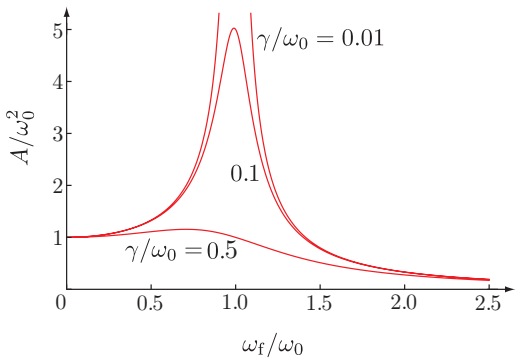
と求まる．ただし，実定数 A と θ は，次式で定義されている．

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2)^2 + (2\gamma\omega_{\mathrm{f}})^2}}, \qquad \tan\theta = \frac{2\gamma\omega_{\mathrm{f}}}{\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2}. \tag{5.20}$$

実際，(i) (5.19) 式の最後から二番目の式が $f_0 A\,\mathrm{e}^{-i\theta} = f_0 A(\cos\theta - i\sin\theta)$ に一致し，(ii) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ が成立することを確認できる．

(5.19) 式を (5.18) 式に代入すると，特殊解が

$$\begin{aligned}\bar{x}_{\mathrm{p}}(t) &= \mathrm{Re}\left\{f_0 A\,\mathrm{e}^{i(\omega_{\mathrm{f}}t-\theta)}\right\} = f_0 A\cos(\omega_{\mathrm{f}}t - \theta) \\ &= \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\mathrm{f}}^2)^2 + (2\gamma\omega_{\mathrm{f}})^2}}\cos(\omega_{\mathrm{f}}t - \theta)\end{aligned} \tag{5.21}$$



と得られる．右図は，規格化された振幅 A/ω_0^2 を角振動の比 $\omega_{\mathrm{f}}/\omega_0$ の関数として，$\gamma/\omega_0 = 0.01, 0.1, 0.5$ の場合に描いたグラフである．外力の角周波数 ω_{f} が固有振動数 ω_0 に近づくにつれて振幅は増大する．また，その増大は，摩擦が小さいほど顕著になることがわかる．この $\omega_{\mathrm{f}} \sim \omega_0$ における強制振動の増大が共振である．

5.3 補足—判別式が重解の場合の基本解

ここでは，$\omega_0 = \gamma$ が成立する場合の (5.5) 式，すなわち

$$\hat{L}\bar{x} = 0, \qquad \hat{L} \equiv \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \gamma^2 \tag{5.22}$$

の基本解が，$\mathrm{e}^{-\gamma t}$ と $t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ であることを証明する．

<u>証明</u>　(5.22) 式の左辺 $\hat{L}\bar{x}$ に

$$\bar{x} = A\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

を代入すると，

$$\hat{L}A\,\mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda+\gamma)^2 A\,\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{5.23a}$$

となる．この式の両辺を λ で微分すると，それぞれ

$$\frac{d}{d\lambda}\text{左辺} = \frac{d}{d\lambda}\hat{L}A\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \hat{L}A\,\frac{d}{d\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t} = \hat{L}A\,t\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$
$$\frac{d}{d\lambda}\text{右辺} = \frac{d}{d\lambda}\left\{(\lambda+\gamma)^2 A\,\mathrm{e}^{\lambda t}\right\} = A\left\{2(\lambda+\gamma)\mathrm{e}^{\lambda t} + (\lambda+\gamma)^2 t\mathrm{e}^{\lambda t}\right\} = A\,(\lambda+\gamma)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\{2+(\lambda+\gamma)t\}$$

が得られる．そして，「もともと**左辺=右辺**が成立していたのであるから，それらを λ で微分したものも等しい」ことに注意すると，上の二式から，等式

$$\hat{L}A\,t\,\mathrm{e}^{\lambda t} = A\,(\lambda+\gamma)\mathrm{e}^{\lambda t}\,\{2+(\lambda+\gamma)t\} \tag{5.23b}$$

が成立することがわかる．(5.23a) 式と (5.23b) 式で，$\lambda = -\gamma$ と置くと，それぞれ

$$\hat{L}A\,\mathrm{e}^{-\gamma t} = 0, \qquad \hat{L}A\,t\,\mathrm{e}^{-\gamma t} = 0 \tag{5.24}$$

が得られる．すなわち，$\mathrm{e}^{-\gamma t}$ と $t\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ が，$\omega_0 = \gamma$ が成立する場合の二つの基本解であることが示された．　■