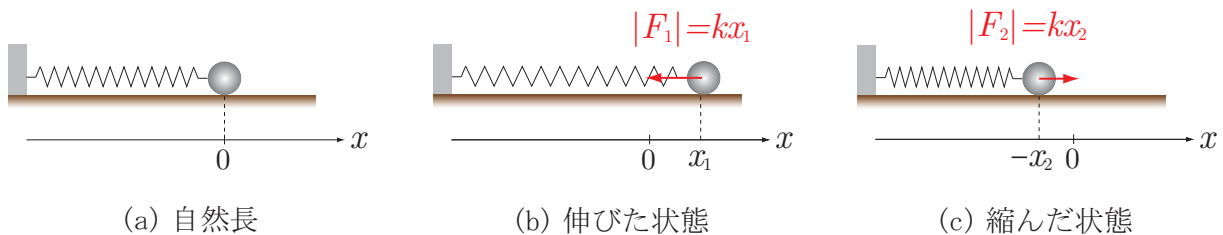


§4 振動

1 バネにつけた質点の単振動

下図 (a) のように、バネの一端に質量 m の質点をつけて摩擦のない滑らかな床面に置き、他端をバネが床面に平行になるように壁に固定する。次に、この質点を引っ張ったり伸ばしたりして、バネの長さを図 (b) や (c) のように自然長から変化させる。すると、質点には、バネの自然長からの変位 x の大きさに比例した力が働く。そしてその方向は、バネを自然長に戻す向きであることが知られている。これを **フックの法則** という。



例えば、図 (b) のようにバネを x_1 だけ自然長から伸ばすと、質点に働く力の大きさは kx_1 で、その方向は $-x$ 方向である。また、図 (c) のようにバネを x_2 だけ自然長から縮めると、質点に働く力の大きさは kx_2 で、その方向は $+x$ 方向である。比例定数 $k > 0$ [N/m] は **バネ定数** と呼ばれる。

フックの法則を数式で表すには、(i) バネに平行に x 軸を取り、(ii) バネが伸びる方向を x 軸の正の方向として (iii) 原点を自然長の位置に選ぶと便利である。すなわち、 $x > 0$ の領域をバネの伸びた状態に、また、 $x < 0$ の領域をバネの縮んだ状態に対応させるのである。すると、フックの法則に従う力は、その方向も含めて、

$$F = -kx \quad (1)$$

と表すことができる。実際、伸び x が正の時は F は負となり、力が x 軸の負の方向に向いていることを表現できている。また、伸び x が負の時（縮んだ状態）には F は正となり、力が x 軸の正の方向に向いている。

この力 F による質点の運動も、ニュートンの運動方程式

$$ma = F \quad (2)$$

を用いて解析できる。まず、(1) 式と加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (3)$$

の二番目の表式を、(2) 式に代入する。ここで v は速度、 t は時間を表す。すると、伸び x に関する二階微分方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (4)$$

を得る。さらに、この両辺を質量 m で割り、新たな定数

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

を導入すると、(4) 式が簡潔に

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad (6)$$

と表現できる。定数 ω は、**角振動数** と呼ばれている。その次元は、(i) 左辺の次元が [長さ (Length)]/[時間 (Time)]² すなわち LT^{-2} であり、(ii) 右辺の x の次元が L であることから、時間の逆数すなわち T^{-1} であることがわかる。

(6) 式の解 $x = x(t)$ は、

$$x(t) = C \cos(\omega t + \theta_0) \quad (7)$$

と表すことができる。ここで、 (C, θ_0) は、**積分定数** と呼ばれるひと組の定数である。

証明

(7) 式を時間 t で微分すると、速度が

$$v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} = -\omega C \sin(\omega t + \theta_0) \quad (8a)$$

と得られる。さらにこの $v(t)$ を t で微分すると、加速度が

$$a(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 C \cos(\omega t + \theta_0) \quad (8b)$$

と表せることがわかる。(7) 式と (8b) 式を見比べると、

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

が得られる。これは、微分方程式 (6) に他ならない。つまり、(7) 式が (6) 式を満たすことが示された。証明終わり。

数学的には、(6) 式を二回不定積分することで (7) 式が得られる。対応する二つの積分定数 (C, θ_0) は、初期時刻 $t = 0$ での位置 $x(0)$ と速度 $v(0)$ を指定することで、完全に決定できる。ここでは、この **初期条件** として、 $t = 0$ で質点を自然長から $A > 0$ だけ伸ばして静かに離す状況

$$x(0) = A > 0, \quad v(0) = 0 \quad (9)$$

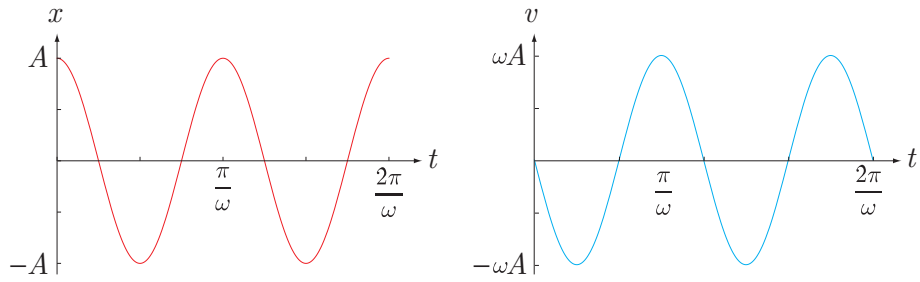
を考える。(7) 式と (8a) 式をこれらの条件に代入すると、積分定数 (C, θ_0) が、

$$\begin{cases} x(0) = C \cos \theta_0 = A \\ v(0) = -C\omega \sin \theta_0 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow (C, \theta_0) = (A, 0)$$

と求まる。従って、時刻 t における質点の位置と速度が、

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad v(t) = -\omega A \sin \omega t \quad (10)$$

と表せることがわかる。これらを図に表すと、下図のようになる。



この運動は、振幅が A で周期が

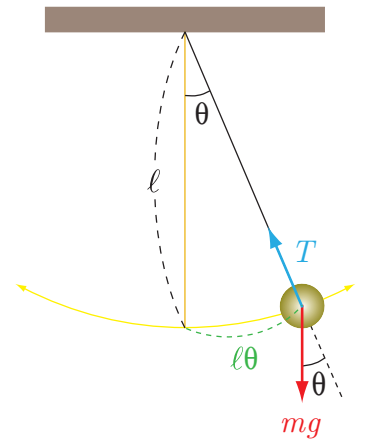
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11)$$

の単振動である。

2 単振り子

天井の梁などに糸の一端を固定し、他端に質量 m の重りをつけて吊り下げ、鉛直面内で微小振動させる。ガリレイは、この「単振り子」が、一定の周期で同じ運動を繰り返す等時性を持つことを発見した（1602年頃）。さらに、この原理を用いた「時計」がホイヘンスによって発明され（1657年頃）、20世紀まで、時間の流れを測る主な道具の一つとして用いられてきた。公園などにあるブランコも単振り子の一種である。ここでは、この単振り子の力学的運動を調べよう。

単振り子の質点に働く力は、糸と鉛直方向のなす角を θ [rad] として、次のようにまとめられる。まず、質点には、重力 mg が働く。しかし、糸の長さは不変であることから、「重力の糸方向の成分 $mg \cos \theta$ は、糸に働く張力 (tension) T で打ち消されている」と結論づけられる。つまり、糸の延伸方向に関して力の釣り合い



$$T = mg \cos \theta$$

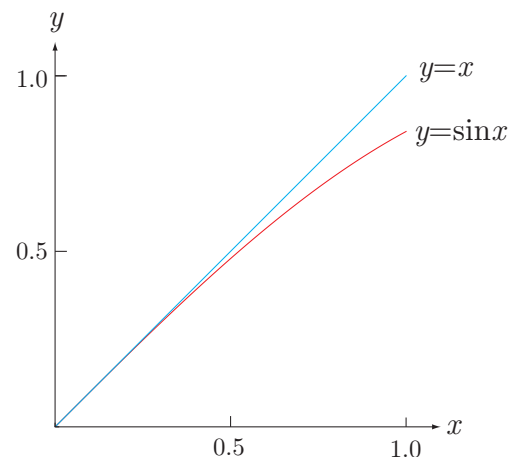
が成立し、この向きの運動はない。従って、質点は、糸と垂直方向の円弧上を運動する。この円弧方向の位置 x とその二階微分は、最下点をその原点とし、糸の長さ l と角 θ [rad] を用いて、

$$x = l\theta, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (12a)$$

と表せる。一方、糸に働く円弧方向の力は、

$$\begin{aligned} F &= -mg \sin \theta \\ &\approx -mg\theta \end{aligned} \quad (12b)$$

である。ここでのマイナス符号は、力 F が θ を小さくする方向を向いていることを表す。また、第二の近似では、微小



振動 ($|\theta| \ll 1$) の場合に成立する関係 $\sin \theta \approx \theta$ を用いた (上図参照)。(12a) 式と (12b) 式を、ニュートンの運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F$$

の左辺と右辺にそれぞれ代入すると、

$$m\ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg\theta \quad (13)$$

が得られる。この式を $m\ell$ で割り、新たな定数

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (14)$$

を導入すると、(4) 式が簡潔に

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\omega^2 \theta \quad (15)$$

と表現できる。この微分方程式は、(6) 式と本質的に同じである。従って、前回と同様に、初期条件

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \quad (16)$$

を満たす解 $\theta = \theta(t)$ が、

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t \quad (17)$$

と得られる。この運動は、振幅が θ_0 で周期が

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (18)$$

の **単振動** である。

3 微分方程式を解く

(6) 式の解は (7) 式である。最初の考察では、解の形を (7) 式のように“天下りの”に与え、実際に (6) 式を満たすことを確かめた。ここでは、(6) 式、すなわち

$$0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x \quad (19)$$

の数学的解法を説明する。その要点は、二次方程式に変形して解くというものである。

微分方程式 (19) の独立変数は t のみであり、また、 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ と x の係数は共に定数 (それぞれ 1 と ω^2) である。この条件を満たす微分方程式は **定数係数常微分方程式** と呼ばれ、一般に次のようにして解くことができる。まず、解の形を

$$x(t) = Ae^{\lambda t} \quad (20)$$

の形に仮定し、(19)式に代入する。ここで $A \neq 0$ と λ は定数である。すると、次のように変形できる。

$$0 = A \frac{d^2 e^{\lambda t}}{dt^2} + \omega^2 A e^{\lambda t} = A \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 A e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega^2) A e^{\lambda t}.$$

このようにして、微分方程式 (19) が、 λ に対する二次方程式

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{21}$$

に還元できた。この二次方程式の解は、

$$\lambda = \pm i\omega \tag{22}$$

の二つである。ただし i は虚数単位を表す。この表式を (20) 式に代入すると、微分方程式 (19) の二つの独立解

$$A_{\pm} e^{\pm i\omega t} \quad (\text{複合同順})$$

が得られる。そして、一般的な解は、それら二つの線形結合として

$$x(t) = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t} \tag{23}$$

と表せる。ただし、 A_{\pm} は二つの任意定数 (積分定数) である。二階微分方程式を二回積分したので、積分定数が二つ現れるのである。

さて、純虚数 $i\theta$ を肩に持つ指数関数 $e^{i\theta}$ は、三角算数 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を用いて、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \tag{24}$$

と表せることが知られている。この三角関数と指数関数を結びつける美しい関係式を、**オイラーの公式** という。

証明

左辺 $f_L(\theta) \equiv e^{i\theta}$ と右辺 $f_R(\theta) \equiv \cos \theta + i \sin \theta$ は、同じ微分方程式

$$\frac{df_i(\theta)}{d\theta} = i f_i(\theta) \quad i = L, R$$

と初期条件

$$f_i(0) = 1$$

を満たす。実際、

$$\frac{df_L(\theta)}{d\theta} = \frac{de^{i\theta}}{d\theta} = ie^{i\theta} = i f_L(\theta), \quad f_L(0) = e^{i0} = 1,$$

$$\frac{df_R(\theta)}{d\theta} = \frac{d(\cos \theta + i \sin \theta)}{d\theta} = -\sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = i f_R(\theta), \quad f_R(0) = \cos 0 = 1,$$

である。従って、一階微分方程式の解の一価性から、 $f_L(\theta) = f_R(\theta)$ が成立する。証明終わり。

(24) 式を (23) 式に代入し、次のように変形する。

$$\begin{aligned} x(t) &= A_+(\cos \omega t + i \sin \omega t) + A_-(\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= (A_+ + A_-) \cos \omega t + i(A_+ - A_-) \sin \omega t \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \begin{cases} A \equiv (A_+ + A_-) \\ B \equiv i(A_+ - A_-) \end{cases} \\ &= C \cos(\omega t + \theta_0) \quad \begin{cases} C \equiv \sqrt{A^2 + B^2} \\ \theta_0 \equiv \arctan \frac{-B}{A} \end{cases} \end{aligned} \tag{25}$$

このようにして、解が (7) 式のように求まった。