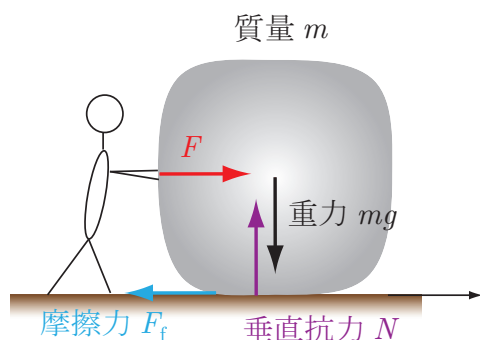


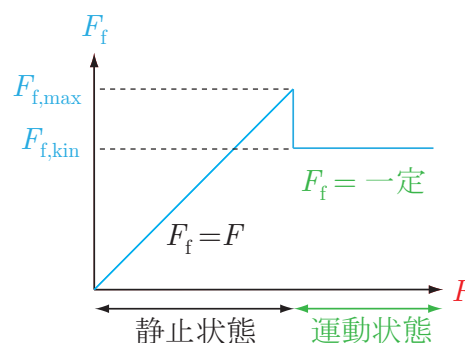
### §3 摩擦力がある場合の運動

#### 1 静止摩擦係数と動摩擦係数

石などの重い物体に力を加えて動かそうとする。しかし、力を増していってもなかなか動かない。いささかやけ気味に、さらに踏ん張ってみる。すると、突然動き出して、加える力も軽くなるように感じる。このような経験はないだろうか。この現象には、摩擦力 (friction もしくは frictional force) が関わっている。



(a) 物体に加わる力



(b) 加える力  $F$  と摩擦力  $F_f$  の関係

摩擦力は、地面あるいは床面と物体との間で働く力である。力を加えていっても、なかなか動かない。この静止状態では、人が加える力の床面に平行な成分  $F$  と摩擦力  $F_f$  が釣り合っている ( $F = F_f$ )。この時の力  $F_f$  を静止摩擦力 (static friction) という。静止摩擦力は、動き出す直前に最大値  $F_{f,max}$  をとる。その値は、多くの場合、垂直抗力  $N$  に比例し、

$$F_{f,max} = \mu N \quad (1a)$$

と表せることが知られている。ここで  $\mu$  は静止摩擦係数 (coefficient of static friction) と呼ばれる比例係数である。また、動き出した後の摩擦力は、近似的に一定値  $F_{f,kin}$  をとる。そして、その値も、多くの場合、垂直抗力  $N$  を用いて

$$F_{f,kin} = \mu' N \quad (1b)$$

と表せる。この力を動摩擦力 (kinetic friction)、比例係数  $\mu'$  を動摩擦係数 (coefficient of kinetic friction) という。一般に、 $\mu > \mu'$  が成立し、動き出すと加える力が小さくて済むようになる。

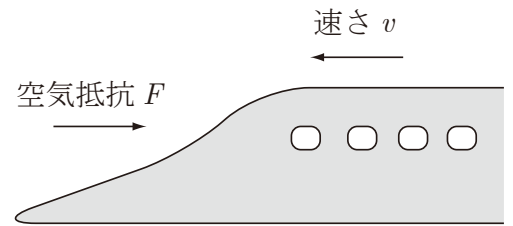
摩擦力は、接触面が乾いているか濡れているか、荒いか滑らかか、などなどによってその大きさが大きく異なる。表 1 には、幾つかの物質の組を、滑らかな乾いた状態で用意して測定した  $\mu$  と  $\mu'$  の実測値を示す。しかし、(1) 式はあくまで現象論的な近似式であり、接触面の状態によっては成り立たない場合もあることを心得ておくべきである。

物質 1	ガラス	銅	アルミニウム
物質 2	ガラス	鋼鉄	鋼鉄
$\mu$	0.9–1.0	0.53	0.61
$\mu'$	0.4	0.36	0.47

表 1: 静止摩擦係数  $\mu$  と動摩擦係数  $\mu'$

## 2 粘性抵抗と慣性抵抗

新幹線の車体の前方は流線型に設計されているが、これは、高速走行の際に受ける空気抵抗を小さくするための工夫である。一般に、空気中や水中を運動するときには、空気や水から抵抗力を受ける。この抵抗力も摩擦力の一種であり、微視的には、気体や液体を構成する分子が物体に衝突することに起因する。その大きさは速さ  $v$  に依存し、方向は運動方向と逆方向に働く。



この抵抗力は、物体が運動する時にのみに働く。言い換えると、 $v = 0$  のときの抵抗力はゼロである。このことから、速さ  $v$  が小さい場合の抵抗力は、 $b > 0$  を定数として、一般的に

$$\vec{F}_v = -b\vec{v} \quad (2)$$

の形にかけることが結論づけられる。この形の抵抗力を粘性抵抗 (viscous resistance) という。マイナス符号は、力  $\vec{F}$  が速度  $\vec{v}$  と逆向きに働くことを明示している。定数  $b$  に関して、半径  $R$  の球に対する微視的計算がストークスにより行われ、

$$b = 6\pi R\eta \quad (3)$$

と表せることが示された。これをストークスの法則という。ここで、 $\eta > 0$  は気体や液体のネバネバ度を特徴づける粘度 (viscosity) である。表 2 には、室温における空気・水・潤滑油の粘度の大きさをまとめた。(3) 式より、粘性抵抗は、運動物体の半径  $R$  に比例して大きくなり、また、気体・液体のネバネバ度にも比例することがわかる。

物質	空気	水	潤滑油
$\eta$ [N·s/m <sup>2</sup> ]	$1.8 \times 10^{-5}$	$8.9 \times 10^{-4}$	$5.8 \times 10^{-2}$

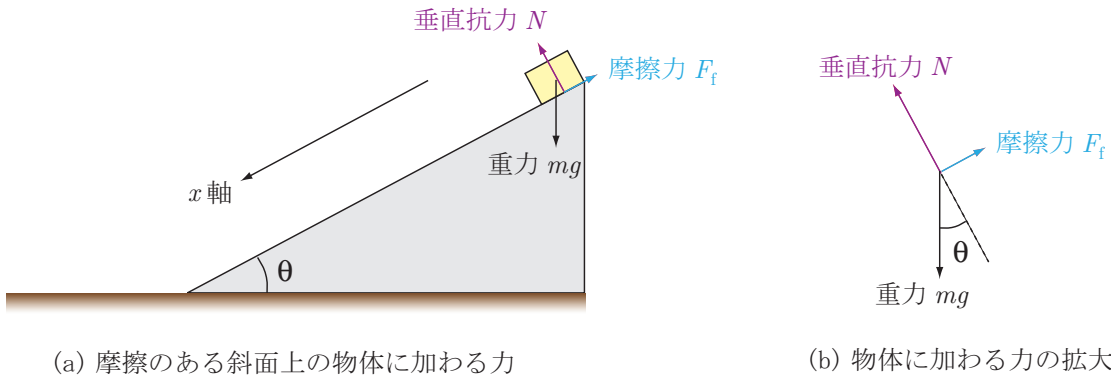
表 2: 粘度  $\eta$

さらに、運動物体の速さが増して後方に渦ができるようになると、抵抗力の大きさは速さ  $v$  の二乗に比例するようになり、 $c > 0$  を定数として

$$F_i = -cv^2 \quad (4)$$

と表せることが知られている。これを慣性抵抗 (inertial resistance) という。

### 3 摩擦力を伴う運動 (1)



(a) 摩擦のある斜面上の物体に加わる力

(b) 物体に加わる力の拡大図

摩擦力が関わる運動の第一の例として、摩擦のある斜面上の物体の運動を考察する。傾斜角  $\theta$  [rad] の斜面上に物体が置かれ、静止している状態を考える。斜面は静止摩擦係数  $\mu$ 、動摩擦係数  $\mu'$  を持つものとする。静止している物体に働く合力はゼロである。その力の釣り合いは、斜面に垂直方向に

$$N = mg \cos \theta \quad (5a)$$

また、斜面に平行方向に

$$F_f = mg \sin \theta \quad (5b)$$

と表せる。このように、物体が静止している状態では、摩擦力  $F_f$  が重力の斜面方向成分  $mg \sin \theta$  を打ち消して、物体の動きを抑えている。

さて、斜面の傾斜角  $\theta$  を変化させることができるものとし、その傾斜角を次第に大きくしていくと、ある臨界角 (critical angle)  $\theta_c$  で物体が滑り出した。(1a) 式によると、その時の摩擦力  $F_{f,\max}$  は、静止摩擦係数  $\mu$  を用いて、

$$F_{f,\max} = \mu N$$

と表せる。この式の左辺と右辺に、それぞれ (5b) 式と (5a) 式で  $\theta \rightarrow \theta_c$  としたものを代入すると、

$$mg \sin \theta_c = \mu mg \cos \theta_c$$

が得られる。したがって、静止摩擦係数は、臨界角  $\theta_c$  を用いて、

$$\mu = \tan \theta_c \quad (6)$$

と表せることがわかる。

$\theta > \theta_c$  の時の物体の運動を解析するため、斜面に沿って下向きに  $x$  軸をとり、最初に静止していた点を原点に選ぶ。すると、斜面に平行方向の運動方程式が、動摩擦力の式  $F_f = \mu' mg \cos \theta$  を用いて、

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \theta - F_f \\ &= mg \sin \theta - \mu' mg \cos \theta \\ &= mg \sin \theta (1 - \mu' \cot \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

と書き下せる。(7) 式に  $a = \frac{dv}{dt}$  を代入して  $m$  で割ると、

$$\frac{dv}{dt} = g_{\text{eff}} \sin \theta, \quad g_{\text{eff}} \equiv g(1 - \mu' \cot \theta) \quad (8)$$

となる。この式を、 $t = 0$  で  $v = 0$  の初期条件のもとに積分すると、時刻  $t$  での速さが

$$v(t) = g_{\text{eff}} t \sin \theta \quad (9a)$$

と得られる。さらに、(9a) 式に  $v = \frac{dx}{dt}$  を代入し、 $t = 0$  で  $x = 0$  の初期条件のもとに積分すると、時刻  $t$  での位置が

$$x(t) = \frac{g_{\text{eff}} \sin \theta}{2} t^2 \quad (9b)$$

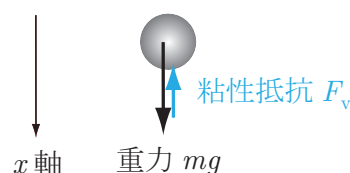
と表せる。このように、動摩擦力は、重力加速度を

$$g \rightarrow g_{\text{eff}} \equiv g(1 - \mu' \cot \theta)$$

のように小さくする効果がある。

## 4 摩擦力を伴う運動 (2)

第二の例として、鉛直方向に落下する質量  $m$  の物体の運動を、摩擦力も取り込んで考察する。物体には、重力  $mg$  とともに、速さ  $v$  に比例する粘性抵抗 (2) が働くものとする。この運動を考察するために、便宜上、物体の運動方向である鉛直下向きに  $x$  軸を取ることにする。対応する運動方程式  $ma = F$  は、加速度と速さの関係  $a = \frac{dv}{dt}$  と合力の表式



$$F = mg - bv \quad (10)$$

を代入することにより、

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv \quad (11)$$

と表せる。

時刻  $t = 0$  に物体を空中で静かに離す状況

$$v(t = 0) = 0 \quad (12)$$

を考え、働く力 (10) に注目する。離れた直後は、重力  $mg$  を受けて加速されるが、速さが増すとともに抵抗力  $bv$  も大きくなり、下向きの力  $F$  は次第に小さくなる。そして最終的に重力  $mg$  と抵抗力  $bv$  がほぼ釣り合う状況が実現される。その際の物体の速さ、すなわち  $t = \infty$  で実現されるであろう速さ  $v_{\infty}$  は、合力がゼロとなる条件

$$mg - bv_{\infty} = 0$$

より

$$v_{\infty} = \frac{mg}{b} \quad (13)$$

と得られる。この速さを終端速度 (terminal velocity) という。

以上の予備的考察に基づいて、(11) 式を  $m$  で割った後、 $v_\infty$  を用いて表すと、

$$\frac{dv}{dt} = \frac{b}{m}(v_\infty - v) \quad (14)$$

となる。この一階微分方程式は、右辺が  $v$  のみの関数となっており、解析的に解くことができる。具体的に、まず、無限小量  $dt$  を有限微小量  $\Delta t$  の極限と考えて数として扱い、(14) 式の両辺に  $\frac{dt}{v_\infty - v}$  をかけると、

$$\frac{1}{v_\infty - v} dv = \frac{1}{\tau} dt \quad (15)$$

が得られる。ただし、

$$\tau \equiv \frac{m}{b} \quad (16)$$

は、時間の次元 [s] を持つ定数である。(15) 式の両辺を、初期条件 (12) を考慮して  $t \in [0, t_1]$  の区間で積分すると、

$$\int_0^{v(t_1)} \frac{1}{v_\infty - v} dv = \frac{1}{\tau} \int_0^{t_1} dt \quad (17)$$

が得られる。この積分は、 $v_\infty - v > 0$  に注意して

$$\left[ -\ln(v_\infty - v) \right]_{v=0}^{v(t_1)} = \frac{1}{\tau} \left[ t \right]_{t=0}^{t_1}$$

と実行できる。ただし、 $\ln x \equiv \log_e x$  は自然対数である。これより、

$$-\ln \{v_\infty - v(t_1)\} + \ln v_\infty = \frac{t_1}{\tau} \quad \longleftrightarrow \quad \ln \frac{v_\infty}{v_\infty - v(t_1)} = \frac{t_1}{\tau}$$

が得られる。さらに、この両辺を  $e = 2.718 \dots$  の指数の肩に乗せ、 $t_1 \rightarrow t$  と置き換えると、

$$\frac{v_\infty}{v_\infty - v(t)} = e^{t/\tau}$$

となる。これを  $v(t)$  について解くと、 $v_\infty = \{v_\infty - v(t)\}e^{t/\tau}$ 、すなわち  $v_\infty e^{-t/\tau} = v_\infty - v(t)$  より、

$$v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad (18)$$

が得られる。

関数 (18) のグラフを描いたのが右図である。落下直後は  $v(t) \propto gt$  にしたがって加速されていくが、速さが増大するとともに加速は鈍り、一定値  $v_\infty$  に近づいていくのが見て取れる。(16) 式で定義された  $\tau$  は、速さの増大が鈍るのが見え始める特徴的時間である。

