§2 ニュートンの運動方程式

1　ニュートンの運動方程式

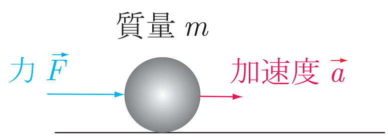
ニュートンが1687年に出版した著書「**プリンピキア(自然哲学の数学的諸原理)**」は、人類の自然界に対する認識に革命を起こした。天体や地球上の自然現象が、(i) 数式に従って秩序をもって運動し、(ii) 予言可能であることが明らかになったのである。その中心をなすのが、次のニュートンの運動方程式である。

ニュートンの運動方程式

質量 m の物体に力 $\vec{F}$ が働くとき、この物体には、等式

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

で決まる加速度 $\vec{a}$ が生じる。



ニュートンの運動方程式によると、物体に力が働くとき、(i) 力の方向に加速度が生じ、(ii) その大きさは力の大きさに比例し質量に反比例する。(1) 式および

加速度と速度・位置ベクトルとの関係

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{2}$$

が、力学における基本式である。

(2) 式を用いると、ニュートンの運動方程式 (1) は、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{3a}$$

あるいは

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{3b}$$

とも表せる。(3a) 式や (3b) 式は、数学的には**微分方程式**と呼ばれる。物体の速度 $\vec{v}$ や位置 $\vec{r}$ を求めることは、数学的には微分方程式を解く（＝積分する）作業である。

力学では、質量の単位として kg（キログラム)、加速度の単位として $\mathrm{m/s^2}$（メートル毎秒毎秒）が標準的に用いられる (MKS 単位系)。また、質量 1kg の質点に $1\mathrm{m/s^2}$ の大きさの加速度を生じさせる力の大きさは、ニュートン (Newton) にちなんで 1N（１ニュートン）と呼ばれている。(1) 式より、$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$ である。

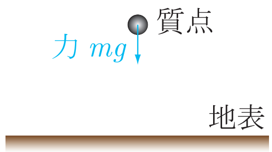
2　力が働かない場合の運動

まず、力 $\vec{F}$ が働かない場合の運動を考察する。(3a) 式に $\vec{F}=\vec{0}$ を代入すると、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=0 \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{v}=\vec{v}_0 \ \text{（一定）} \tag{4}$$

が得られる。すなわち、力が働かない場合には、はじめに静止していた（$\vec{v}_0=\vec{0}$）物体は静止し続け、また、はじめに有限の速度 $\vec{v}_0$ を持っていた物体は、同じ等速直線運動を続ける。このことは、しばしば**慣性の法則**と呼ばれる。

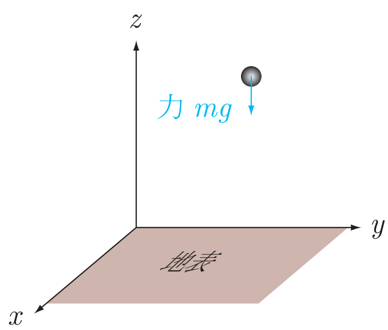
3　重力による運動



実験によると、地表付近にある質量 m の物体には、地表方向に向けて

$$F=mg, \qquad\qquad g=9.8\mathrm{m/s}^2 \tag{5}$$

の大きさの力が働く。この力 F を**重力** (gravity)、g を重力加速度と呼ぶ。



重力による運動は、一定の力（大きさと方向が不変の力）による運動の典型例である。その運動を解析するために、地表から鉛直上方に z 軸を取り、重力を、その方向も含めて、

$$\begin{aligned}\vec{F}&=(0,0,-mg)\\ &=-mg\,\vec{e}_z, \qquad\qquad \vec{e}_z\equiv(0,0,1)\end{aligned} \tag{6}$$

と表す。ここで $\vec{e}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである。

(6) 式を (3a) 式の右辺に代入し、両辺を m で割ると、速度 $\vec{v}$ に対する一階微分方程式

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=-g\,\vec{e}_z \tag{7}$$

を得る。さらに、時刻 $t=t_0$ で質点が速度 $\vec{v}_0$ をもち、位置 $\vec{r}_0$ にあったものとする。このことは、

$$\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0, \qquad \vec{r}(t_0)=\vec{r}_0 \tag{8}$$

と表せる。これを**初期条件**と言う。この初期条件の下に、(7) 式を時間に関して二度積分する。まず、(7) 式を、$t\in[t_0,t_1]$ について積分する。ただし、$t\in[t_0,t_1]$ は $t_0\le t\le t_1$ を、また、$\le$ は $\leqq$ を表す。$-g\,\vec{e}_z$ が定ベクトルであることに注意すると、この積分により、

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\vec{v}(t)}{dt}dt=-g\,\vec{e}_z\int_{t_0}^{t_1}dt \qquad \longleftrightarrow \qquad \vec{v}(t_1)-\vec{v}(t_0)=-g\,\vec{e}_z(t_1-t_0)$$

が得られる。さらに、$\vec{v}(t_0)=\vec{v}_0$ を右辺に移行し、$t_1 \to t$ の置き換えを行うと、時刻 t における速度が、

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0-g\,\vec{e}_z(t-t_0) \tag{9a}$$

と得られる。次に、(9a) 式の左辺に $\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ を代入し、$t\in[t_0,t_1]$ について積分すると、

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\vec{v}_0-g\,\vec{e}_z(t-t_0)\right]dt$$

となる。左辺の積分は、$\vec{r}(t_1)-\vec{r}_0$ と計算できるので、$\vec{r}_0$ を右辺に移項して

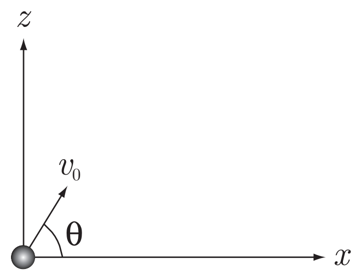
$$\begin{aligned}\vec{r}(t_1)&=\vec{r}(t_0)+\left[\vec{v}_0(t-t_0)-\frac{1}{2}g\,\vec{e}_z(t-t_0)^2\right]_{t=t_0}^{t_1}\\&=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t_1-t_0)-\frac{1}{2}g\,\vec{e}_z(t_1-t_0)^2\end{aligned}$$

が得られる。さらに、$t_1\to t$ の置き換えを行うと、時刻 t での位置が、

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)-\frac{1}{2}g\,\vec{e}_z(t-t_0)^2 \tag{9b}$$

と表せることがわかる。

例として、時刻 $t_0=0$ に、原点から x 方向に向かって、地表と角度 θ [rad] の方向に速さ v_0 で野球のボールを遠投する場合を考える。時刻 $t>0$ においてボールが空中にあるものとすると、その速度 $\vec{v}(t)$ と位置 $\vec{r}(t)$ は、初期条件



$$t_0=0,\qquad \vec{v}_0=(v_0\cos\theta,0,v_0\sin\theta),\qquad \vec{r}_0=(0,0,0),$$

と $\vec{e}_z=(0,0,1)$ を (9a) 式と (9b) 式に代入することにより、

$$\vec{v}(t)=(v_0\cos\theta,\ 0,\ v_0\sin\theta-gt), \tag{10a}$$

$$\vec{r}(t)=\left(v_0t\cos\theta,\ 0,\ v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2\right), \tag{10b}$$

と得られる。

第一に、ボールが最高点に達する時刻 t_1 では、z 軸方向の速さが 0 となる。すなわち、

$$0=v_z(t_1)=v_0\sin\theta-gt_1$$

が成立する。このことから、時刻 t_1 とその時の x 座標が、

$$t_1=\frac{v_0\sin\theta}{g}, \tag{11a}$$

$$x(t_1)=v_0t_1\cos\theta=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}, \tag{11b}$$

と求まる。対応する最高点の高さは、

$$z(t_1) = v_0 t_1 \sin\theta - \frac{1}{2}g t_1^2 = \frac{1}{2}v_0 t_1 \sin\theta + \frac{t_1}{2}(v_0 \sin\theta - g t_1) = \frac{1}{2}v_0 t_1 \sin\theta = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{11c}$$

である。

第二に、ボールが地表に落ちる時刻 t_2 では、ボールの高さがゼロとなり

$$0 = z(t_2) = v_0 t_2 \sin\theta - \frac{1}{2}g t_2^2 = \frac{t_2}{2}(2v_0 \sin\theta - g t_2)$$

が成立する。このことから、時刻 $t_2 > 0$ とその時の x 座標が、

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = 2t_1, \tag{12a}$$

$$x(t_2) = v_0 t_2 \cos\theta = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}, \tag{12b}$$

と得られる。(12b) 式より、同じ初速度 v_0 で投げ上げた場合にボールが最も遠くまで届くのは、$\sin 2\theta$ が最大値をとる場合、すなわち、

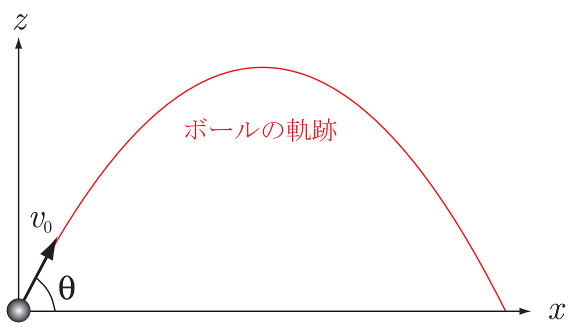
$$\theta = \frac{\pi}{4} \tag{13}$$

の角度で投げ上げた場合であることがわかる。

(x, z) 平面におけるボールの軌跡は、$x(t) = v_0 t \cos\theta$ より $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$ と表し、$z(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}g t^2$ に代入することにより、

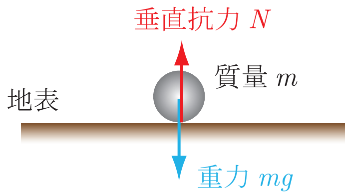
$$\begin{aligned} z &= v_0 \frac{x}{v_0 \cos\theta} \sin\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + x \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\ &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \end{aligned} \tag{14}$$

と得られる。すなわち、ボールの軌跡は放物線を描くことがわかった。



4　垂直抗力

静止している物体の加速度はゼロ ($\vec{a} = \vec{0}$) である。従って、ニュートンの運動方程式 (1) から、静止物体に働く合力はゼロ ($\vec{F} = \vec{0}$) であると結論づけられる。一方で、重力は、水平な地表に静止している物体にも働くはずである。これより、物体には、重力を相殺する力が地表から働いているものと推論される。この力、すなわち物体が、置かれた表面から垂直方向に受ける力



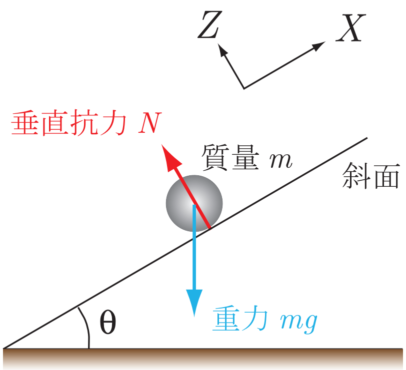
$$N = mg \tag{15}$$

を、**垂直抗力** (normal force) と呼ぶ。

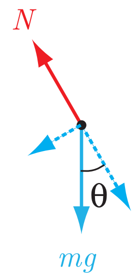
垂直抗力は傾いた斜面でも働く。図のように、水平な地表と角度 θ をなす滑らかな斜面上に、質量 m の物体がある場合を考える。斜面に沿って上方に X 軸を、斜面に垂直上方に Z 軸をとると、Z 方向では物体は静止している。これより、斜面から物体に Z 方向上向きの垂直抗力が働き、重力の斜面に垂直な成分を相殺していると結論づけられる。すなわち、この場合の垂直抗力の大きさは、右図 (b) より、

$$N = mg\cos\theta \tag{16}$$

であることがわかる。



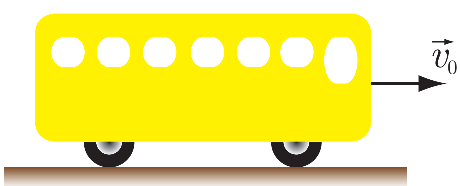
(a) 斜面上の物体に働く力



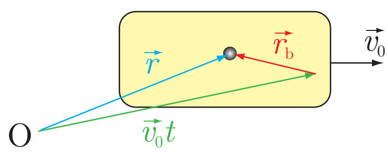
(b) 力の分解

5　ガリレイの相対性原理

一定速度で走っているバスの中で、テニスボールを静かに床に置くと、ボールは走っているバスの床で静止したままである。また、バスの中でテニスボールを一定の高さから静かに落とすと、垂直に落下するように見える。このように、一定速度で走っているバスの中で観測する物理現象は、静止した地上にいるのと同じように見える。この事実は、ニュートンの運動方程式 (1) を用いて説明できる。



具体的に、一定速度 $\vec{v}_0$ で走るバスの中でのテニスボールの運動を考える。このテニスボールを二つの座標系で表す。第一に、時刻 t において、バスの外で静止している観測者から見たテニスボールの位置ベクトルを $\vec{r}(t)$ とする。ただし、時刻 $t = 0$ でのバスの運転席の位置を原点 O に選ぶ。第二



に、同じテニスボールを、バス (bus) の運転席を座標原点する位置ベクトル $\vec{r}_{\mathrm{b}}(t)$ で表す。さて、時刻 $t>0$ における運転席の位置は、$\vec{v}_0 t$ である。従って、静止座標系での位置ベクトル $\vec{r}(t)$ は、運動するバス内での位置ベクトル $\vec{r}_{\mathrm{b}}(t)$ と $\vec{v}_0$ を用いて、

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_{\mathrm{b}}(t)+\vec{v}_0 t \tag{17}$$

と表現できる。この変換を**ガリレイ変換**という。この両辺を時間 t で微分すると、二つの座標系での速度に関する変換則（和則）

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\vec{r}_{\mathrm{b}}(t)}{dt}+\vec{v}_0 \quad\longleftrightarrow\quad \vec{v}(t)=\vec{v}_{\mathrm{b}}(t)+\vec{v}_0 \tag{18}$$

が得られる。さらに、この式をもう一度 t で微分すると、$\vec{v}_0$ が定ベクトルであることより、

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d\vec{v}_{\mathrm{b}}(t)}{dt} \quad\longleftrightarrow\quad \vec{a}(t)=\vec{a}_{\mathrm{b}}(t) \tag{19}$$

となる。すなわち、どちらの座標系でも加速度の大きさは同じである。この結果を (1) 式に代入すると、

$$m\vec{a}_{\mathrm{b}}=\vec{F} \tag{20}$$

が得られる。すなわち、バスと共に動く座標系で見たニュートンの運動方程式 (20) は、地上に固定された座標系で見たニュートンの運動方程式 (1) と同じ形である。

このように、互いに一定の相対速度で動く二つの座標系では、ニュートンの運動方程式は同じ形を持つ。このことは、二つの座標系で物理法則に違いがないことを表している。この事実は、**ガリレイの相対性原理**と呼ばれている。

しかし、速度 $\vec{v}_0$ の大きさが光速 $c=3.0\times10^8\mathrm{m/s}$ に近づくと、ガリレイの相対性原理は成り立たなくなり、アインシュタインの**特殊相対性原理**に取って代わられることになる。さらに、「互いに加速度を持つような複数の座標系でも同じ力学法則は同じである」との要請を置いて完成されたのが、アインシュタインの**一般相対性理論**である。