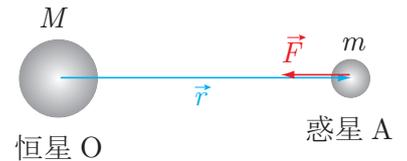


§13 惑星の運動

惑星の運動に関する人々の興味は、力学発展の主要エンジンの一つであった。ガリレオの地動説、惑星の運動に関するケプラーの法則など、ニュートン以前における近世の成果に限っても、枚挙にいとまがない。今回は、この惑星の運動を、万有引力の法則と運動方程式に基づいて記述する。

1 惑星の運動方程式

図のように、質量 m を持つ惑星 A が、質量 $M (\gg m)$ を持つ恒星 O からの万有引力 \vec{F} を受けて運動する場合を考察していく。惑星 A の受ける万有引力 \vec{F} は、恒星 O を原点とする惑星 A の位置ベクトル \vec{r} を用いて、



$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}, \quad G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2 \quad (1)$$

と表せる。対応する A の運動の軌跡 $\vec{r}(t)$ は、ニュートンの運動方程式

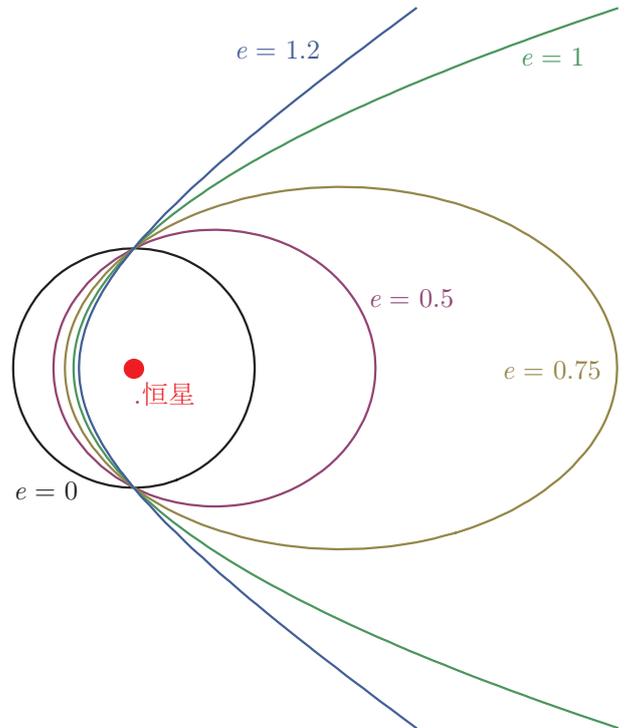
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (2)$$

を時間について二回積分することで得られる。しかし、三つの変数 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ についての積分を二回行うことは大変である。その大変さは、保存則を用いることで、大幅に軽減することができる。

今回の授業では、この惑星の運動の軌跡を、古典力学に基づいて数学的に導出する。その結果は、長さの単位を適当に選んだ無次元の $\tilde{x}\tilde{y}$ 平面で、

$$(1 - e^2)\tilde{x}^2 - 2e\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1 \quad (3)$$

と表せる。ここで、 $e > 0$ は **離心率** と呼ばれる無次元のパラメータで、軌道の形状を決定する。具体的には、右図のように赤丸で表した恒星のまわりで、



- $e < 1$ のとき楕円、
- $e = 1$ のとき $2\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1$ なる放物線、
- $e > 1$ のとき双曲線

という美しい幾何学曲線を描いて運動する。

地球の離心率は $e = 0.081$ で、その軌道は $e = 0$ の円に近い。一方、公転周期が約 75 年のハレー彗星は、離心率 $e = 0.967$ の偏平な楕円軌道を描き、次回は 2061 年に太陽に近づくと予言されている。

2 エネルギー保存則と角運動量保存則

(1) 式で与えられる力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は、条件 $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ を満たす **保存力** であり (§8.2 参照)、万有引力ポテンシャル

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}$$

を用いて $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$ と表せる (§8.4 参照)。また、(2) 式と速度 $\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ とのスカラ積をとって線積分することにより、力学的エネルギー

$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GmM}{r} \quad (4)$$

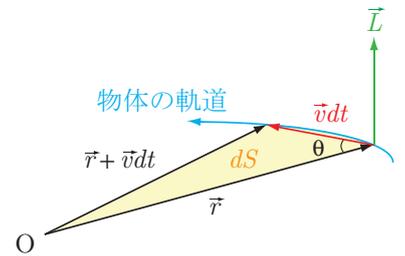
が保存することを示せる (§8.2 参照)。

さらに、(1) 式の \vec{F} は、原点に向かう **中心力** であり、角運動量

$$\vec{L} \equiv m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (5)$$

が保存する (§10.3 参照)。

惑星の運動の軌跡は、(2) 式を解く代わりに、(4) 式と (5) 式に基づいて求めることができる。実際、これらの式には、時間についての一階微分 $\dot{\vec{r}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ のみが現れているので、積分を 1 回行うだけで軌跡 $\vec{r}(t)$ が得られる。すなわち、計算の大幅な簡略化が可能になる。



3 極座標への変換

角運動量 \vec{L} が保存することから、惑星の運動における万有引力の影響は、 \vec{L} に垂直な平面で生じることが結論づけられる。そこで、 \vec{L} に垂直方向の平面内の運動に着目する。そして、惑星の運動が xy 平面内にあるように座標系を選び、惑星の位置ベクトルを

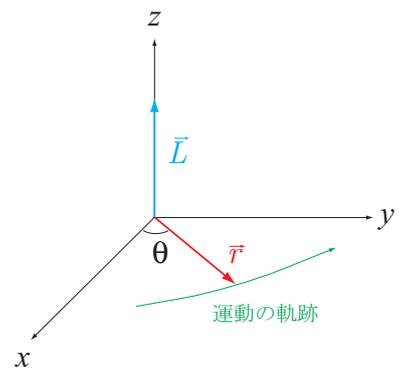
$$\vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \quad (6)$$

と極座標表示する。ここで、原点からの距離 $r = |\vec{r}|$ と角度 θ [rad] は時間 t の関数である。この表示による速度 $\dot{\vec{r}}$ は、関数の積の導関数 $\frac{d}{dt}fg = \dot{f}g + f\dot{g}$ と微分の合成則 $\frac{d}{dt}f(g(t)) = \dot{g}(t) f'(g(t))$ を用いて、

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, 0) \quad (7)$$

と得られる。この表式を用いると、(4) 式の運動エネルギーは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 &= \frac{1}{2}m \left\{ (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2}m \left\{ (\dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta) + (\dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{r}r\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (8)$$



のように簡潔に表現できる。さらに、角運動量 (5) も、

$$\begin{aligned}\vec{L} &= (0, 0, m(x\dot{y} - y\dot{x})) = (0, 0, mr \cos \theta (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) - mr \sin \theta (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta)) \\ &= (0, 0, mr\dot{r}(-\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta) + mr^2\dot{\theta}(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)) \\ &= (0, 0, mr^2\dot{\theta})\end{aligned}\quad (9)$$

と表せる。(8) 式を (4) 式に代入すると、力学的エネルギーが

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}\quad (10a)$$

へと変形できる。この E は定数である。さらに角運動量 (5) は、 z 成分のみが有限で、その大きさは

$$L = mr^2\dot{\theta}\quad (10b)$$

と表される。この L も定数である。これら二つの式が、惑星の運動の軌跡を求める出発点となる。

(10b) 式を $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ と表し、(10a) 式に代入すると、力学的エネルギーが、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)\quad (11)$$

のように、有効ポテンシャル (effective potential)

$$U_{\text{eff}}(r) \equiv -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}\quad (12)$$

中の一次元運動の形に表せる。(12) 式第二項の L^2 に比例する項は、**遠心力ポテンシャル** と呼ばれる。有効ポテンシャル (12) を、次のように書き換える。

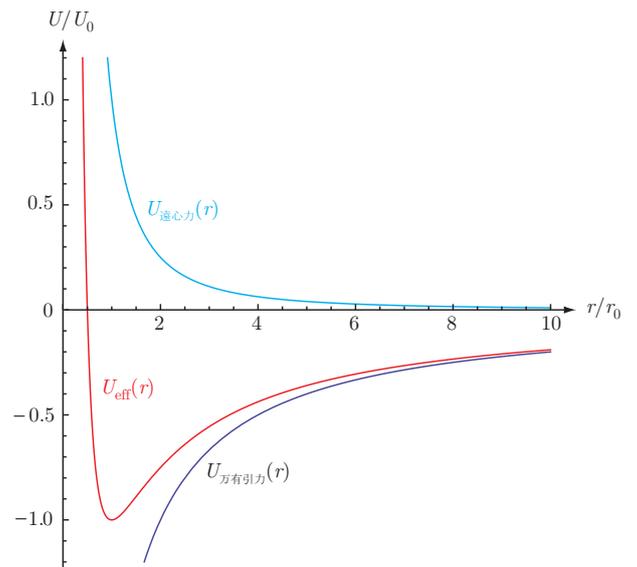
$$\begin{aligned}U_{\text{eff}}(r) &= \frac{L^2}{2m} \left(-\frac{2GMm^2}{L^2 r} + \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{L^2}{2m} \left(-\frac{2}{r_0 r} + \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{L^2}{2mr_0^2} \left(-2\frac{r_0}{r} + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \\ &\equiv U_0 \left(-\frac{2}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \right)\end{aligned}\quad (13)$$

ここで、新たな定数

$$r_0 \equiv \frac{L^2}{Gm^2 M}, \quad U_0 \equiv \frac{L^2}{2mr_0^2}\quad (14)$$

と変数

$$\tilde{r} \equiv \frac{r}{r_0}\quad (15)$$



を導入した。この r_0 と U_0 は、それぞれ長さエネルギーの次元を持つ。(13) 式を $\tilde{r} \equiv r/r_0$ の関数として描くと、右上図のようになる。 $\tilde{r} = 1$ のとき、最小値 $U(r)/U_0 = -1$ を持つことがわかる。

4 惑星の軌跡を求める

r と \dot{r} で表された (11) 式は、原点からの距離 r に関する 1 階の微分方程式と見なせる。これを解く (=積分する) ことで、惑星の運動の軌跡が求められる。そのために、(10b) 式と (15) 式を用いて、 r の独立変数を時間 t から角度 θ に次のように変換する。

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{mr_0^2 \tilde{r}^2} \frac{d(r_0 \tilde{r})}{d\theta} = \frac{L}{mr_0} \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{d\tilde{r}}{d\theta} \quad (16)$$

この表式を用いると、(11) 式における動径方向 (r 方向) の運動エネルギー $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$ が、次のように表せる。

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m \frac{L^2}{m^2 r_0^2} \frac{1}{\tilde{r}^4} \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta} \right)^2 = \frac{U_0}{\tilde{r}^4} \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta} \right)^2. \quad (17)$$

ここで、 U_0 は (14) 式に定義されている。

(13) 式と (17) 式を (11) 式に代入し、両辺を U_0 で割って次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{E}{U_0} &= \frac{1}{\tilde{r}^4} \left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta} \right)^2 - \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d\tilde{r}}{d\theta} = \pm \sqrt{\tilde{r}^4 \left(\frac{E}{U_0} + \frac{2}{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \right)} \\ \longleftrightarrow \quad d\theta &= \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{E} \tilde{r}^4 + 2\tilde{r}^3 - \tilde{r}^2}} d\tilde{r}. \end{aligned} \quad (18)$$

ここで \tilde{E} は、 U_0 を単位とする力学的エネルギー

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{U_0} \quad (19)$$

である。さらに、変数変換

$$\tilde{r} = \frac{1}{s}, \quad d\tilde{r} = \frac{ds}{-s^2} \quad (20)$$

を行うと、(18) 式が次のように表せる。

$$\begin{aligned} d\theta &= \pm \frac{1}{\sqrt{\tilde{E} s^{-4} + 2s^{-3} - s^{-2}}} \left(\frac{ds}{-s^2} \right) = \mp \frac{1}{\sqrt{\tilde{E} + 2s - s^2}} ds \\ &= \mp \frac{ds}{\sqrt{1 + \tilde{E} - (s-1)^2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

この微分方程式は、変数変換

$$s-1 = \sqrt{1 + \tilde{E}} \sin x, \quad ds = \sqrt{1 + \tilde{E}} \cos x dx \quad (22)$$

により、

$$d\theta = \mp \frac{\sqrt{1 + \tilde{E}} \cos x}{\sqrt{1 + \tilde{E}} \cos x} dx \quad \longleftrightarrow \quad \theta = \mp x + C \quad \longleftrightarrow \quad x = \mp(\theta - C) \quad (23)$$

と容易に積分できる。ただし、 C は積分定数である。この式を (22) 式の第一の関係に代入し、 $s = \tilde{r}^{-1}$ の関係に注意すると、関数 $\tilde{r}(\theta)$ が

$$\frac{1}{\tilde{r}} - 1 = \pm \sqrt{1 + \tilde{E}} \sin(\theta - C) \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{r} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + \tilde{E}} \sin(\theta - C)} \quad (24)$$

と得られる。この \tilde{r} は、 $\theta_0 - C = \pm \frac{\pi}{2}$ を満たす角 θ_0 で最小値をとる。この θ_0 を用いると、

$$\pm \sin(\theta - C) = \pm \sin\left(\theta - \theta_0 \pm \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta - \theta_0)$$

と書き換えられる。さらに

$$\text{離心率} : e \equiv \sqrt{1 + \tilde{E}} \quad (25)$$

を導入し、 $\theta_0 = \pi$ となるように座標軸を選ぶと、最終的に $\tilde{r} = \tilde{r}(\theta)$ が

$$\tilde{r}(\theta) = \frac{1}{1 - e \cos \theta} \quad (26)$$

と求まる。

xy 平面での軌跡を求めるために、(26) 式を次のように変形する。

$$\tilde{r} = 1 + e\tilde{r} \cos \theta \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{r}^2 = 1 + 2e\tilde{r} \cos \theta + e^2\tilde{r}^2 \cos^2 \theta \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1 + 2e\tilde{x} + e^2\tilde{x}^2.$$

ただし、 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv (\tilde{r} \cos \theta, \tilde{r} \sin \theta)$ である。これより、惑星の $\tilde{x}\tilde{y}$ 面内での軌跡が、

$$(1 - e^2)\tilde{x}^2 - 2e\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1$$

と得られる。さらに e の大きさに軌跡を分類すると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq e < 1 \ (-1 \leq \tilde{E} \leq 0) \text{ のとき、楕円 :} \quad \left(\tilde{x} - \frac{e}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{\tilde{y}^2}{1 - e^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^2} \\ e = 1 \ (\tilde{E} = 0) \text{ のとき、放物線 :} \quad -2\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1 \\ e > 1 \ (\tilde{E} > 0) \text{ のとき、双曲線 :} \quad \left(\tilde{x} + \frac{e}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{\tilde{y}^2}{e^2 - 1} = \frac{1}{(e^2 - 1)^2} \end{array} \right. \quad (27)$$

このようにして、恒星の万有引力の下で運動する惑星の軌跡が、楕円・放物線・双曲線という幾何学曲線を描くことが明らかになった。特に楕円の方程式は、

$$\frac{\left(\tilde{x} - \frac{e}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{e}{1 - e^2}r_0\right)^2}{\left(\frac{r_0}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}}\right)^2} = 1 \quad (28)$$

と書き換えられ、長半径 a と短半径 b がそれぞれ

$$a = \frac{r_0}{1 - e^2}, \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{ar_0} \quad (29)$$

であることがわかる。ただし、 r_0 は (14) 式に定義されている。

(27) 式の軌跡を描くと、左下図のようになる。(26) 式より、無次元の力学的エネルギー \tilde{E} と離心率 e の間には、

$$\tilde{E} = e^2 - 1$$

の関係がある。 $0 \leq e < 1$ すなわち $-1 \leq \tilde{E} < 0$ の時、惑星は有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ に束縛され、有限の領域を周期運動する。一方、 $e \geq 1$ すなわち $\tilde{E} \geq 0$ の時には、運動エネルギーがポテンシャルエネルギー $U_{\text{eff}}(r)$ を上回り、惑星は無限遠から近づいて無限遠へと去っていく。これらの結果は、右下図のように、有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ の中での運動として理解できる。矢印のついた水平線に対応した縦軸の値が、無次元化された力学的エネルギー \tilde{E} の値である。

