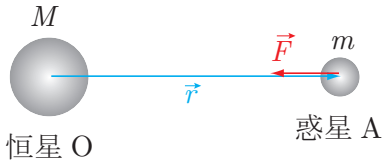
13　惑星の運動

惑星の運動に関する人々の興味は，力学発展の主要エンジンの一つであった．ガリレオの地動説，惑星の運動に関するケプラーの法則など，ニュートン以前における近世の成果に限っても，枚挙にいとまがない．今回は，この惑星の運動を，万有引力の法則と運動方程式に基づいて記述する．

13.1　惑星の運動方程式

図のように，質量 m を持つ惑星 A が，質量 M $(\gg m)$ を持つ恒星 O からの万有引力 $\vec{F}$ を受けて運動する場合を考察していく．惑星 A の受ける万有引力 $\vec{F}$ は，恒星 O を原点とする惑星 A の位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて，



$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}, \qquad G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg{\cdot}s^2} \tag{13.1}$$

と表せる．対応する A の運動の軌跡 $\vec{r}(t)$ は，ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \tag{13.2}$$

を時間について二回積分することで得られる．しかし，三つの変数 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ についての積分を二回行うことは大変である．その大変さは，保存則を用いることで，大幅に軽減することができる．

今回の授業では，この惑星の運動の軌跡を，古典力学に基づいて数学的に導出する．その結果は，長さの単位を適当に選んだ無次元の $\tilde{x}\tilde{y}$ 平面で，

$$(1-e^2)\tilde{x}^2 + 2e\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1) \tag{13.3}$$

と表せる．ここで，$e \geq 0$ は**離心率**と呼ばれる無次元のパラメータで，軌道の形状を決定する．具体的には，右図のように赤丸で表した恒星のまわりで，

- $e < 1$ のとき楕円，
- $e = 1$ のとき放物線 $2\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1$，
- $e > 1$ のとき双曲線

という美しい幾何学曲線を描いて運動する．

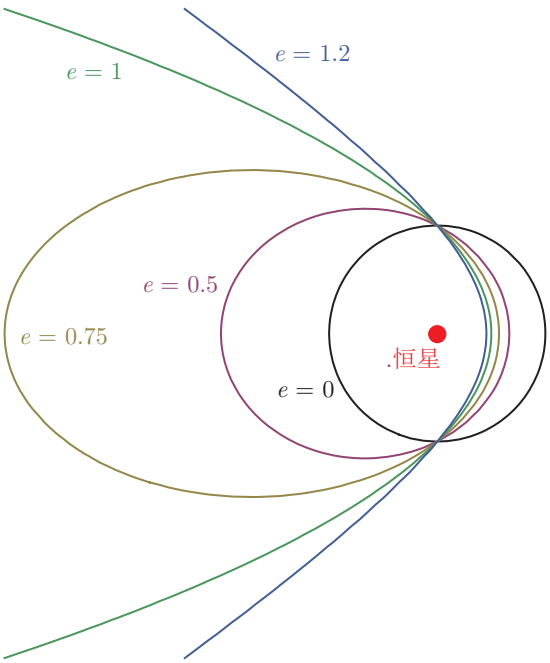


図 13.1: 惑星の運動の軌跡

地球の離心率は $e = 0.081$ で，その軌道は $e = 0$ の円に近い．一方，公転周期が約 75 年のハレー彗星は，離心率 $e = 0.967$ の偏平な楕円軌道を描き，次回は 2061 年に太陽に近づくと予言されている．

13.2　エネルギー保存則と角運動量保存則

(13.1) 式で与えられる力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は，条件 $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ を満たす**保存力**であり（§8.2 参照），万有引力ポテンシャル

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

を用いて $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$ と表せる．また，(13.2) 式と速度 $\dot{\vec{r}} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ とのスカラー積をとって線積分することにより，力学的エネルギー

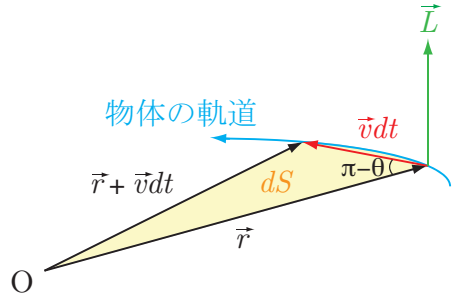
$$E \equiv \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{GmM}{r} \tag{13.4}$$

が保存することを示せる（8.2 節参照）．

さらに，(13.1) 式の $\vec{F}$ は，原点に向かう**中心力**であり，角運動量

$$\vec{L} \equiv m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{13.5}$$

が保存する（10.3 節参照）．

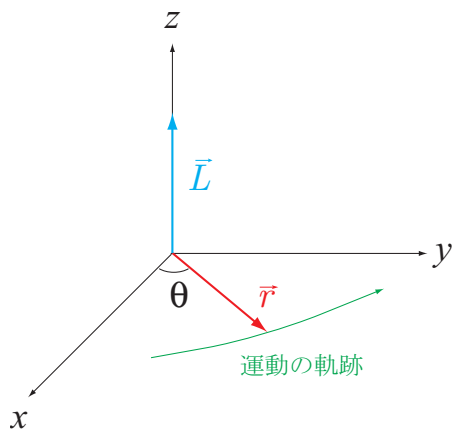


惑星の運動の軌跡は，(13.2) 式を解く代わりに，(13.4) 式と (13.5) 式に基づいて求めることができる．実際，これらの式には，時間についての一階微分 $\dot{\vec{r}} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ のみが現れているので，積分を 1 回行うだけで軌跡 $\vec{r}(t)$ が得られる．すなわち，計算の大幅な簡略化が可能になる．

13.3　極座標への変換

角運動量 $\vec{L}$ が保存することから，惑星の運動における万有引力の影響は，$\vec{L}$ に垂直な平面で生じることが結論づけられる．そこで，$\vec{L}$ に垂直方向の平面内の運動に着目する．そして，惑星の運動が xy 平面内にあるように座標系を選び，惑星の位置ベクトルを

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \tag{13.6}$$



と極座標表示する．ここで，原点からの距離 $r = |\vec{r}|$ と角度 θ [rad] は時間 t の関数である．この表示を用いると，質量 m の物体が中心力場で運動するときの角運動量と運動エネルギーが，それぞれ

$$\vec{L} = (0, 0, mr^2\dot{\theta}), \tag{13.7a}$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{13.7b}$$

と得られる（例題 13.1）．

例題 13.1 中心力による物体の運動を，極座標表示 (13.6) を用いて考察する．以下の問いに答えよ．

(1) 物体の速度 $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$ を極座標で表示せよ．

(2) 角運動量 $\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$ が (13.7a) 式のように表せることを示せ．

(3) 運動エネルギーが (13.7b) 式のように表せることを示せ．

解答

(1) 極座標表示 (13.6) における速度 $\dot{\vec{r}}$ は，積の微分公式

$$\frac{d}{dt}(fg) = \dot{f}g + f\dot{g}$$

と微分の連鎖律

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = \dot{g}(t)\,\dot{f}(g(t))$$

を用いて，次のように得られる．

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta, 0). \tag{13.8}$$

(2) 角運動量は，(13.6) 式と (13.8) 式を $\vec{L} \equiv \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ に代入し，ベクトル積の定義式を用いることで，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= (0, 0, m(x\dot{y} - y\dot{x})) \\
&= \Big(0, 0, mr\cos\theta(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) - mr\sin\theta(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)\Big) \\
&= \Big(0, 0, mr\dot{r}(\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta) + mr^2\dot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\Big) \\
&= (0, 0, mr^2\dot{\theta}).
\end{aligned}$$

(3) 運動エネルギー (13.4) は，(13.8) 式を用いて，以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} &= \frac{1}{2}m\left\{(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}m\left\{(\dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta)\right. \\
&\qquad \left. +(\dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{r}r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta)\right\} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right).
\end{aligned}$$

これに (13.7a) 式からの表現 $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2}$ を代入すると，(13.7b) を得る． ■

(13.7) 式を用いると，極座標表示でのエネルギー (13.4) が，独立変数を時刻 t から角度 θ に変換した形

$$E = \frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + U_{\text{eff}}(r) \tag{13.9}$$

に表せる（例題 13.2）．ただし，$U_{\mathrm{eff}}(r)$ は

$$U_{\mathrm{eff}}(r) \equiv -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{13.10}$$

で定義された有効ポテンシャル (effective potential) である．

例題 13.2 角運動量の極座標表示 (13.7a) と運動エネルギーの極座標表示 (13.7b) を用いて，(13.4) 式のエネルギーが，(13.10) 式のように表せることを示せ．

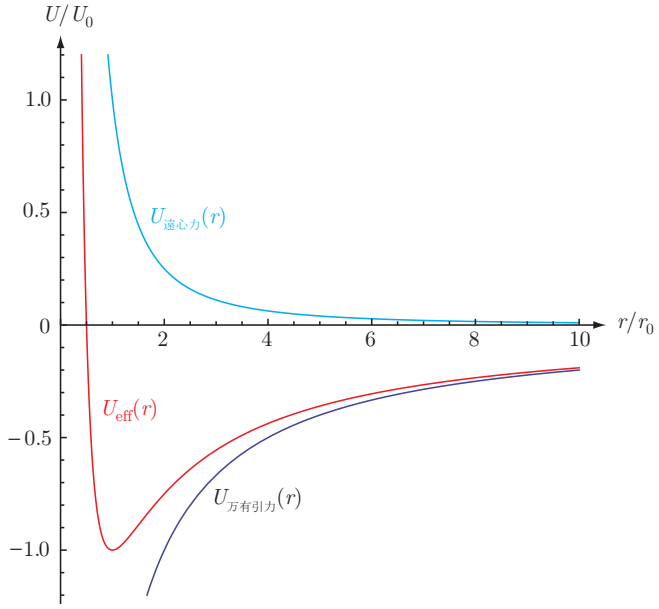
解答 (13.4) 式の $\dot{r}$ は，$\dot{r} = \dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{dr}{d\theta}$ と書き換えて (13.7a) 式を用いることにより，

$$\dot{r} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{13.11}$$

と表せる．この表式と (13.7b) 式を (13.4) 式に代入すると，エネルギーが，有効ポテンシャル (13.10) を用いた式 (13.9) へと変形できる． ■

(13.10) 式で，第一項は万有引力ポテンシャルを，第二項は斥力をもたらす遠心力ポテンシャルを表す．右図には，この (13.10) 式を，ポテンシャル $U_{\mathrm{eff}}(r)$ に最小値を与える $r = r_0$ と，ポテンシャルの最小値の絶対値 U_0 で規格化して描いた．

物理学では，無次元化という操作を行って，解くべき問題を簡潔かつ明快なものにすることが頻繁に行われる．ここでも，(13.10) 式の有効ポテンシャルを用いて，無次元化を行おう．



例題 13.3 (13.9) 式と (13.10) 式について以下の問いに答えよ．

(1) $U_{\mathrm{eff}}(r)$ が最小値をとる点 r_0 と，その最小値の深さ $U_0 \equiv -U_{\mathrm{eff}}(r_0)$ を求めよ．

(2) 原点からの距離 r とエネルギー E を，$r = r_0\tilde{r}$ および $E = U_0\tilde{E}$ と変数変換し，無次元化されたエネルギー $\tilde{E}$ を無次元化された長さ $\tilde{r}$ の関数として求めよ．

解答

(1) (13.10) 式の $U_{\mathrm{eff}}(r)$ が $r = r_0$ で最小値をとるための必要条件は，

$$0 = U'_{\mathrm{eff}}(r_0) = \frac{GMm}{r_0^2} - \frac{L^2}{mr_0^3}$$

である．これより，r_0 と $U_0 \equiv -U_{\mathrm{eff}}(r_0)$ が，次のように求まる．

$$r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}, \tag{13.12a}$$

$$U_0 = -\left(-\frac{GMm}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2}\right) = \frac{L^2}{2mr_0^2}. \tag{13.12b}$$

(2) (13.9) 式に $r = r_0\tilde{r}$ を代入すると，$E = \dfrac{L^2}{2mr_0^2}\dfrac{1}{\tilde{r}^4}\left(\dfrac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)^2 + \dfrac{L^2}{2mr_0^2}\left(-\dfrac{2}{\tilde{r}} + \dfrac{1}{\tilde{r}^2}\right)$ となる．これより，$\tilde{E} \equiv E/U_0$ が，次のように求まる．

$$\tilde{E} = \frac{1}{\tilde{r}^4}\left(\frac{d\tilde{r}}{d\theta}\right)^2 - \frac{2}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2}. \quad \blacksquare \tag{13.13}$$

13.4 運動の軌跡

(13.13) 式より，解くべき微分方程式が，

$$\frac{d\tilde{r}}{d\theta} = \sigma\tilde{r}^2\sqrt{\tilde{E} + \frac{2}{\tilde{r}} - \frac{1}{\tilde{r}^2}} \qquad (\sigma \equiv \pm 1)$$

と得られる．この式は，次のように表せる．

$$d\theta = \sigma\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2\sqrt{\tilde{E} + 2\tilde{r}^{-1} - \tilde{r}^{-2}}} \qquad (\sigma \equiv \pm 1). \tag{13.14}$$

例題 13.4 変数変換 $\tilde{r} = u^{-1}$ により，(13.14) 式を不定積分せよ．

解答 $u = \tilde{r}^{-1}$ の無限小変化は $du = -\tilde{r}^{-2}d\tilde{r}$ と表せる．これらを (13.14) 式に代入すると，

$$d\theta = -\sigma\frac{du}{\sqrt{\tilde{E} + 2u - u^2}} = -\sigma\frac{du}{\sqrt{1 + \tilde{E} - (u-1)^2}} \tag{13.15}$$

を得る．この微分方程式は，変数変換

$$u - 1 = \sqrt{1 + \tilde{E}}\,\cos\phi, \qquad \phi \in [0, \pi] \tag{13.16}$$

により解くことができる．ただし，ϕ の定義域は，$u - 1$ が正負いずれの値も取り得ることを考慮して選んだ．(13.16) 式とその無限小変化の式 $du = -\sqrt{1 + \tilde{E}}\,\sin\phi\,d\phi$ を，(13.15) 式に代入すると，微分方程式が

$$d\theta = \sigma\frac{\sqrt{1 + \tilde{E}}\,\sin\phi}{\sqrt{1 + \tilde{E}}\,\sin\phi}\,d\phi \quad \longleftrightarrow \quad \theta = \sigma\phi + \theta_0 \quad \longleftrightarrow \quad \phi = \sigma(\theta - \theta_0)$$

と容易に積分できる．ただし，θ_0 は積分定数である．この式と $u = \tilde{r}^{-1}$ の関係を (13.16) 式に代入すると，関数 $\tilde{r}(\theta)$ が次のように得られる．

$$\tilde{r} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \tilde{E}}\,\cos(\theta - \theta_0)}. \quad \blacksquare \tag{13.17}$$

(13.17) 式は，離心率

$$e \equiv \sqrt{1 + \tilde{E}} \tag{13.18}$$

を導入し，$\theta_0 = 0$ となるように座標軸を選ぶことで，

$$\tilde{r}(\theta) = \frac{1}{1 + e\cos\theta} \tag{13.19}$$

と表せる．xy 平面での軌跡を求めるために，(13.19) 式を $\tilde{r} = 1 - e\tilde{r}\cos\theta$ と表し，両辺を 2 乗すると，

$$\tilde{r}^2 = 1 - 2e\tilde{r}\cos\theta + e^2\tilde{r}^2\cos^2\theta \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1 - 2e\tilde{x} + e^2\tilde{x}^2$$

となる．ただし，$(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv (\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta)$ である．これより，惑星の $\tilde{x}\tilde{y}$ 面内での軌跡が，(13.3) 式のように得られる．さらに e の大きさで軌跡を分類すると，次のようになる．

$$\begin{cases} 0 \le e < 1 \ (-1 \le \tilde{E} \le 0) \text{ のとき，楕円：} & \left(\tilde{x} + \dfrac{e}{1-e^2}\right)^2 + \dfrac{\tilde{y}^2}{1-e^2} = \dfrac{1}{(1-e^2)^2} \\ e = 1 \ (\tilde{E} = 0) \text{ のとき，放物線：} & -2\tilde{x} + \tilde{y}^2 = 1 \\ e > 1 \ (\tilde{E} > 0) \text{ のとき，双曲線：} & \left(\tilde{x} - \dfrac{e}{e^2-1}\right)^2 - \dfrac{\tilde{y}^2}{e^2-1} = \dfrac{1}{(e^2-1)^2} \end{cases} \tag{13.20}$$

このようにして，恒星の万有引力の下で運動する惑星の軌跡が，楕円・放物線・双曲線という幾何学曲線を描くことが明らかになった．特に楕円の方程式は，

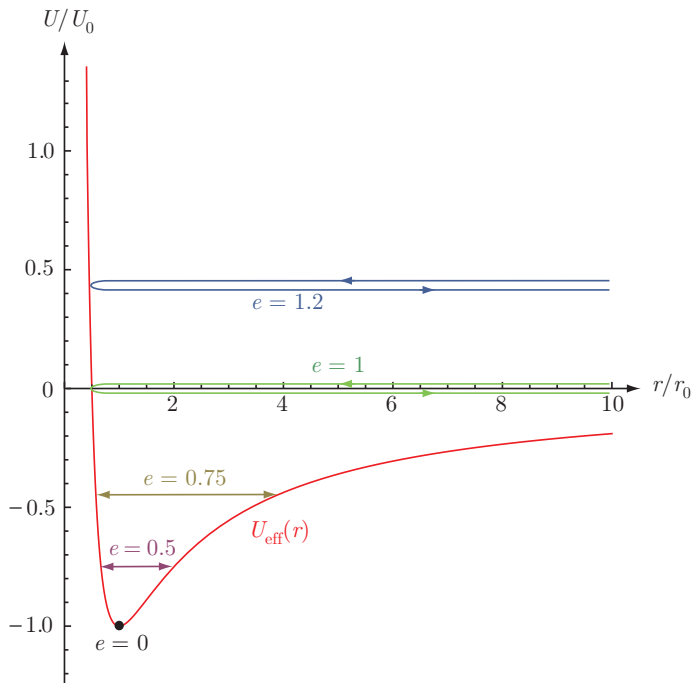
$$\frac{\left(\tilde{x} + \dfrac{e}{1-e^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-e^2}\right)^2} + \frac{\tilde{y}^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\left(x + \dfrac{e}{1-e^2}r_0\right)^2}{\left(\dfrac{r_0}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1 \tag{13.21}$$

と書き換えられ，長半径 a と短半径 b がそれぞれ

$$a = \frac{r_0}{1-e^2}, \qquad b = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{ar_0} \tag{13.22}$$

であることがわかる．ただし，r_0 は (13.12a) 式に定義されている．

(13.20) 式の軌跡を描くと，図 13.1 のようになる．(13.19) 式より，無次元の力学的エネルギー $\tilde{E}$ と離心率 e の間には，

$$\tilde{E} = e^2 - 1$$

の関係がある．$0 \le e < 1$ すなわち $-1 \le \tilde{E} < 0$ の時，惑星は有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ に束縛され，有限の領域を周期運動する．一方，$e \ge 1$ すなわち $\tilde{E} \ge 0$ の時には，運動エネルギーがポテンシャルエネルギー $U_{\text{eff}}(r)$ を上回り，惑星は無限遠から近づいて無限遠へと去っていく．これらの結果は，右図のように，有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ の中での運動として理解できる．矢印のついた水平線に対応した縦軸の値が，無次元化された力学的エネルギー $\tilde{E}$ の値である．