§12 剛体の回転をともなう運動

大きさが有限で滑らかな球形をしたビリヤード球は、滑るのではなく、実際には回転しながらビリヤード台を進んで行く。ここでは、大きさが有限で変形しないという特徴を持つ剛体が、回転しながら運動する現象を考察する。

1　質点系の重心とその運動方程式

9.5 節では、n 個の質点系の運動方程式を考察した。質量 m_i の質点 i $(i=1,2,\cdots,n)$ に力 $\vec{F}_i$ が働く時、その運動方程式は、

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i \tag{1}$$

で与えられる。$i=1,2,\cdots,n$ について和をとると、

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{2}$$

となる。ここで、質点系の全質量 M、重心 $\vec{R}$、全外力 $\vec{F}$ をそれぞれ次のように定義する。

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + \cdots + m_n, \tag{3a}$$

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n}, \tag{3b}$$

$$\vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n. \tag{3c}$$

すると (2) 式は、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \vec{F} \tag{4}$$

と表せる。

証明

(4) 式の左辺と右辺を入れ換えた方程式 $\vec{F} = M\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$ に、(3) 式を代入し、時間微分を次のように実行する。

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 + \cdots + \vec{F}_n &= (m_1 + \cdots + m_n)\frac{d^2}{dt^2}\frac{m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + \cdots + m_n} \\
&= \frac{(m_1 + \cdots + m_n)}{m_1 + \cdots + m_n}\frac{d^2}{dt^2}(m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_n\vec{r}_n) \\
&= m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + \cdots + m_n\frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} \\
&= m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \cdots + m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt}.
\end{aligned}$$

証明終わり。

一方、(1) 式にベクトル積 $\vec{r}_i\times$ を作用して書き換えると、次式が得られることを学んだ（10.2 節参照)。

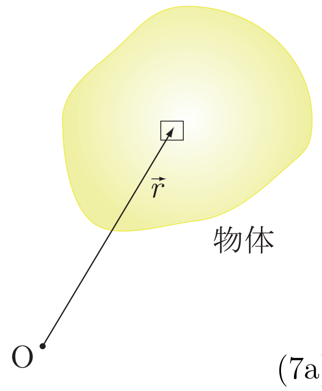
$$\frac{d\vec{L}_i}{dt}=\vec{N}_i,\qquad \begin{cases}\vec{L}_i\equiv\vec{r}_i\times\vec{v}_i & \text{：角運動量}\\ \vec{N}_i\equiv\vec{r}_i\times\vec{F}_i & \text{：力のモーメント}\end{cases}\tag{5}$$

この式を、$i=1,2,\cdots,n$ について和をとると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N},\qquad \begin{cases}\vec{L}\equiv\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{v}_i & \text{：全角運動量}\\ \vec{N}\equiv\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i & \text{：全モーメント}\end{cases}\tag{6}$$

が得られる。

2　剛体とその運動方程式



剛体とは、形が変化しない有限の大きさの物体で、質点間の距離が変化しない質点系とみなすことができる。質点系の重心の運動方程式 (4) は、次のような一般化により、剛体の重心に対しても成立することがわかる。

まず、物体の密度を $\rho(\vec{r})$ とすると、位置 $\vec{r}$ のまわりの微小領域の質量 $dm(\vec{r})$ は、$\rho(\vec{r})$ に微小領域の体積 $dV\equiv dxdydz$ をかけ、

$$dm(\vec{r})=\rho(\vec{r})dV$$

と表せる。従って、物体の質量 M と重心 $\vec{R}$ は、それぞれ

$$M=\int_V dm=\int_V\rho(\vec{r})dV,\tag{7a}$$

$$\vec{R}=\frac{1}{M}\int_V\vec{r}\rho(\vec{r})dV\tag{7b}$$

により計算できる。ただし $\int_V$ は物体の領域全体にわたる体積積分である。同様に、位置 $\vec{r}$ の周りの微小領域に働く力 $d\vec{F}(\vec{r})$ は、力の密度 $\vec{f}(\vec{r})$ に微小領域の体積 $dV\equiv dxdydz$ をかけ、

$$d\vec{F}(\vec{r})=\vec{f}(\vec{r})dV$$

と表せる。従って、物体に働く全外力 $\vec{F}$ は、

$$\vec{F}=\int_V d\vec{F}=\int_V\vec{f}(\vec{r})dV\tag{7c}$$

と表せる。これらを用いると、(4) 式は剛体についてもそのまま成立し、

$$M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\vec{F}\tag{8}$$

と表せる。

また、剛体の角運動量 $\vec{L}$ と剛体に働く力のモーメント $\vec{N}$ を、それぞれ次のように定義する。

$$\vec{L}\equiv\int_V\rho(\vec{r})\vec{r}\times\dot{\vec{r}}dV,\qquad \vec{N}\equiv\int_V\vec{r}\times\vec{f}(\vec{r})dV\tag{9}$$

ただし、$\dot{\vec{r}}=\vec{v}$ である。すると、

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}\tag{10}$$

が成り立つ。

3　固定軸のまわりの回転運動と慣性モーメント

剛体の回転運動は、固定軸のまわりに剛体全体が同じ角速度 ω [rad] で運動するという特徴がある。そして、その角運動量の大きさ L は、慣性モーメントと呼ばれる定数 I [kg·m^2] を用いて、

$$L = I\omega \tag{11}$$

と表せる。

証明

(9) 式の角運動量の定義式の $\dot{\vec{r}}$ に、回転運動の速度の表式

$$\dot{\vec{r}}_{\rm rot} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

を代入し、次のように変形する。

$$\vec{L} = \int_V \rho(\vec{r})\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})dV = \int_V \rho(\vec{r})[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{r}]dV.$$

この式と回転軸である $\vec{\omega}$ 方向の単位ベクトル $\vec{e}_\omega$ とのスカラー積（内積）をとると、回転軸方向の角運動量の大きさ $L \equiv \vec{L}\cdot\vec{e}_\omega$ が，$\vec{r}$ と $\vec{\omega}$ のなす角 θ を用いて、次のように得られる。

$$\begin{aligned} L \equiv \vec{L}\cdot\vec{e}_\omega &= \int_V \rho(\vec{r})[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{r}]\cdot\vec{e}_\omega dV = \int_V \rho(\vec{r})[(\vec{r}\cdot\vec{r})(\vec{\omega}\cdot\vec{e}_\omega) - (\vec{r}\cdot\vec{\omega})(\vec{r}\cdot\vec{e}_\omega)]dV \\ &= \int_V \rho(\vec{r})\Big[r^2\omega - (r\omega\cos\theta)(r\cos\theta)\Big]dV = \int_V \rho(\vec{r})r^2\omega(1-\cos^2\theta)dV \\ &= \left[\int_V \rho(\vec{r})(r\sin\theta)^2 dV\right]\omega. \end{aligned}$$

証明終わり。

上の証明より、慣性モーメントの表式が、

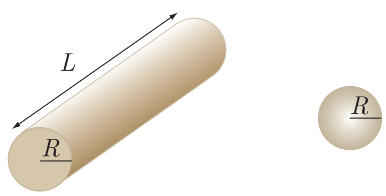
$$I = \int_V \rho(\vec{r})\, r_\perp^2\, dV = \frac{M}{V}\int_V r_\perp^2 dV \tag{12}$$

と得られる。ここで $r_\perp$ は、回転軸から垂直方向への距離である。また、第二の等式は、密度が一定で $\rho(\vec{r}) = M/V$ と表せる場合の表式である。

例として、右図 (a) と (b) に示した一様な円柱 (cylinder) と球 (sphere) の中心軸まわりの慣性モーメント $I_{\rm C}$ と $I_{\rm S}$ は、それぞれ

$$I_{\rm C} = \frac{1}{2}MR^2, \qquad I_{\rm S} = \frac{2}{5}MR^2 \tag{13}$$

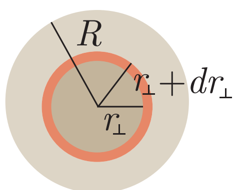
と求まる。



(a) 円柱　(b) 球

$I_{\rm C}$ の証明

中心軸を起点とし、それに垂直方向の距離 $r_\perp$ と $r_\perp + dr_\perp$ との間にある円筒部分の体積は、円周の長さ $2\pi r_\perp$ に $dr_\perp$ と L をかけた値 $dV = 2\pi L r_\perp dr_\perp$ である。これと円柱の体積 $V = \pi R^2 L$ を (12) 式に代入し、$r_\perp$ について 0 から R まで積分すると、$I_{\rm C}$ が次のように求まる。

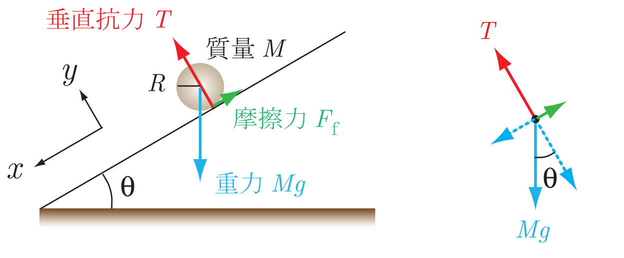


$$I_{\rm C} = \frac{M}{\pi R^2 L}\int_0^R r_\perp^2\, 2\pi L r_\perp dr_\perp = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r_\perp^3 dr_\perp = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r_\perp^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2}MR^2.$$

証明終わり。

4　斜面を転がり落ちる剛体球

質量 M、回転軸からの半径 R、慣性モーメント I を持つ剛体が、角度 θ の斜面を滑らずに転がり落ちる場合を考察する。剛体には、重力 Mg、垂直抗力 T、摩擦力 F_f の三つの力が働くものとする。回転が起こるためには、この摩擦力が不可欠である。摩擦のない道路では、自動車の車輪は回らない！



(a) 斜面上の剛体に働く力　(b) 力の分解

斜面に沿って下向きに x 軸をとると、斜面方向の運動方程式は、

$$M\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta - F_\mathrm{f} \tag{14a}$$

となる。ここで F_f は摩擦力である。次に、回転の方程式は、角速度を ω として、角運動量 $L = I\omega$ と力のモーメント $N = RF_\mathrm{f}$ を角運動量の方程式 $\dfrac{dL}{dt} = N$ に代入することで、

$$I\frac{d\omega}{dt} = RF_\mathrm{f} \tag{14b}$$

と書き下せる。さらに、滑らずに転がり落ちる場合の斜面方向の速さ v は、角速度 ω を用いて、

$$v = R\omega \quad\longleftrightarrow\quad \omega = \frac{v}{R} \tag{15}$$

と表せる。この第二式を (14b) 式に代入して R で割ると、摩擦力 F_f が

$$F_\mathrm{f} = \frac{I}{R^2}\frac{dv}{dt} \tag{16}$$

と表せる。この式を (14a) 式に代入すると、

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\frac{dv}{dt} = Mg\sin\theta \quad\longleftrightarrow\quad \frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + (I/MR^2)}\sin\theta \tag{17}$$

となる。このように、剛体が転がり落ちる場合の方程式は、質点が、摩擦のない斜面を、有効重力 (effective gravity)

$$g_\mathrm{eff} = \frac{g}{1 + (I/MR^2)} \tag{18}$$

を受けて滑り落ちる場合に等価である。この表式から、慣性モーメント I が大きいほどゆっくりと転がり落ちることがわかる。

例として、時刻 $t = 0$ において静かに転がり始めた場合を考える。$t > 0$ における速さ $v(t)$ と位置 $x(t)$ は、(17) 式を t について積分することで、

$$v(t) = (g_\mathrm{eff}\sin\theta)t, \qquad x(t) = \frac{1}{2}(g_\mathrm{eff}\sin\theta)t^2 \tag{19}$$

と求まる。

5　力学的エネルギー保存則

質点に働く摩擦力は、力学的エネルギーから熱エネルギーへの転換を引き起こし、力学的エネルギーの減少をもたらすことを §3 で学んだ。一方、(14) 式に現れる摩擦力 F_f は、回転を引き起こす純粋な力として働き、力学的エネルギーの損失は起こらない。すなわち、力学的エネルギー保存則が成り立っている。

このことを確かめるために、まず、回転の運動エネルギーの表式を求める。回転軸のまわりの回転の速さ v_rot は、固定軸からの垂直方向の距離 $r_\perp$ と角速度 ω を用いて、

$$v_\mathrm{rot} = r_\perp \omega \tag{20}$$

と表せる。そのまわりの微小領域 dV の回転運動のエネルギー dE_rot は、密度 $\rho(\vec{r})$ を用いて

$$dE_\mathrm{rot} = \frac{1}{2} \times dm \times v_\mathrm{rot}^2 = \frac{1}{2} \times \rho(\vec{r}) dV \times (r_\perp \omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \rho(\vec{r}) r_\perp^2 dV \tag{21}$$

と表せる。剛体の回転運動のエネルギーは、この式を剛体全体について積分することにより、

$$E_\mathrm{rot} = \int_V dE_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_V \rho(\vec{r}) r_\perp^2 dV = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{22}$$

と、慣性モーメント (12) を用いて表せることがわかる。従って、重力下における力学的エネルギー保存則は、鉛直上方を z 軸にとった場合、

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgz = 一定 \qquad \longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right) v^2 + Mgz = 一定$$

と表せる。さらに、この式を $1 + \dfrac{I}{MR^2}$ で割ると、

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mg_\mathrm{eff} z = 一定 \tag{23}$$

が得られる。この式は、有効重力 g_eff のもとでのエネルギー保存則と読める。そして、転がり落ちる場合の加速度の減少 $g \to g_\mathrm{eff}$ は、回転運動にエネルギーが費やされるためであると理解できる。