§11 慣性力

バスに乗っている時、バスが加速したり減速したりすると、体が傾くのを感じる。あるいは、車に乗ってカーブに差しかかると、外側に体が傾くのを感じる。このような見かけの力を慣性力という。ここでは、慣性力、特に、地球の回転運動に伴う慣性力である遠心力とコリオリ力について学ぶ。

1 慣性力

運動しているバス内にある物体 1 の運動を、外の静止座標系 xyz と、バスと共に運動する座標系 $x'y'z'$ で観測する。二つの座標系での物体 1 の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_1'$ とすると、それらは、xyz 座標系から見た $x'y'z'$ 座標系での原点の位置ベクトル $\vec{R}$ を通して、

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \vec{r}_1' \tag{1}$$

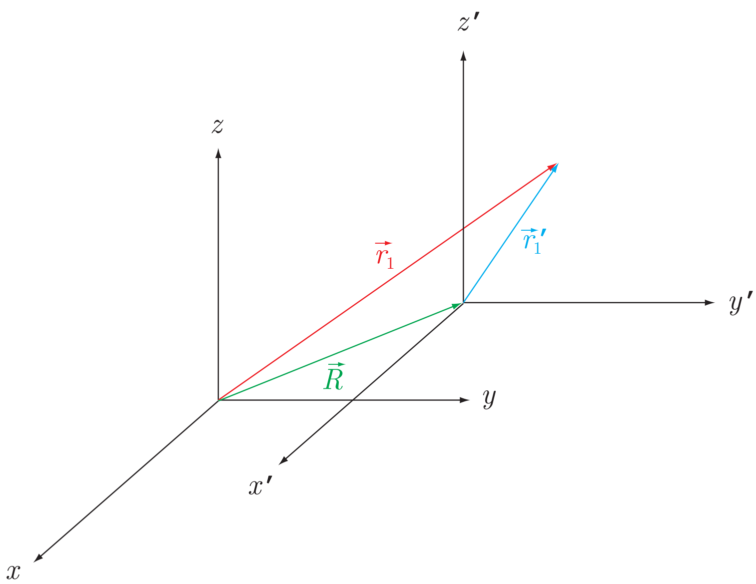
で結びついている。動くバスの場合、$\vec{R}$ としては、例えば運転席を選ぶことができ、$\vec{r}_1$ は、客席の通路に置かれたスーツケースなどを考えることができる。物体 1 の運動方程式は、その質量 m_1 と働く力 $\vec{F}_1$ を用いて、xyz 座標系で

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 \tag{2}$$

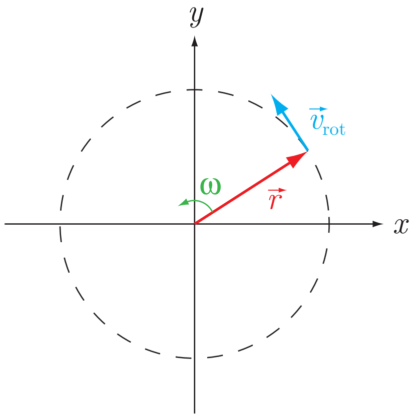
と表せる。この式に (1) 式を代入し、$\vec{r}_1'$ のみを左辺に残すと、

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1'}{dt^2} = \vec{F}_1 - m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \tag{3}$$

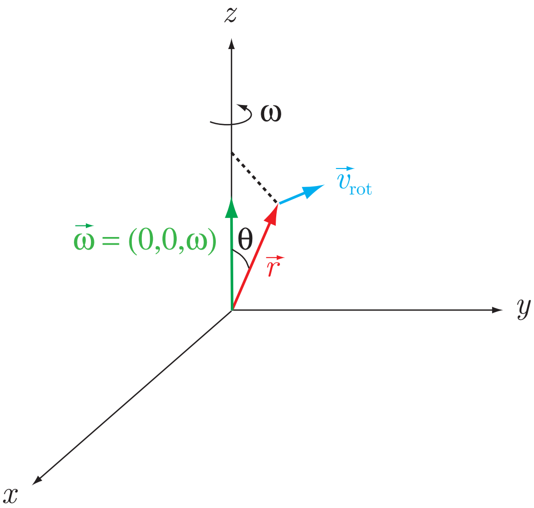
が得られる。この式より、運転手がブレーキをかけたりアクセルペダルを踏んだりして運転席に加速度 $\left| \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right| > 0$ が生じると、バスの中の物体 1 には見かけの力 $-m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$ が働くことがわかる。



2 回転運動とベクトル積



(a) 二次元平面での回転



(b) 三次元空間での回転

次に、地球などの回転する物体上での慣性力を考察するため、回転運動をベクトルで表す方法を学ぶ。二次元平面内で、原点の周りに一定の角速度 ω [rad] と半径 r で回転している質点の速さ v_{rot} は、1 秒間に半径 r の円周を移動する距離、すなわち、半径 r に 1 秒間の回転角 ω をかけた大きさ

$$v_{\mathrm{rot}} = r\omega$$

である（上図 (a) 参照）。

三次元空間で、この回転の速さ v_{rot} に回転方向を加え、ベクトルで表そう。そのために、回転軸方向の単位ベクトル $\vec{e}_z$ に回転の角速度 ω をかけたベクトル

$$\vec{\omega} \equiv \omega\vec{e}_z = (0, 0, \omega) \tag{4}$$

を導入する。ここで「回転軸方向」とは、回転に沿って右ネジの進む方向である。また、座標原点を回転軸上の一点に選び、そこからの位置ベクトルを $\vec{r}$ で表す（上図 (b) 参照）。すると、位置 $\vec{r}$ での回転速度 $\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ は、ベクトル積を用いて、

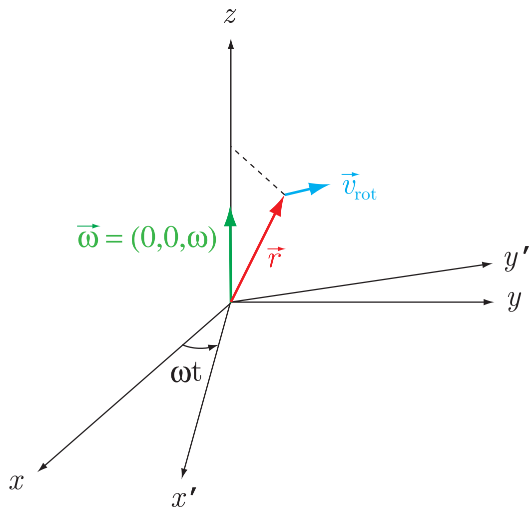
$$\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{5}$$

と表すことができる。実際、この表現により、(i) $\vec{v}_{\mathrm{rot}}$ が $\vec{\omega}$ と $\vec{r}$ の両方に垂直であること、(ii) その方向が $\vec{\omega}$ から $\vec{r}$ へと右ネジの進む方向であること、(iii) 大きさが角速度 ω と回転軸からの距離 $r\sin\theta$ の積 $\omega r\sin\theta = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$ であること、の全てが表現できている。ベクトルを用いた (5) 式の表現は、座標系の回転によって不変なので、回転軸が z 軸でない場合にも一般的に成立する。

3　静止座標系と回転座標系での速度の関係

回転する地球上の物体の運動を、静止座標系と回転座標系の両方で眺め、回転座標系で生じる慣性力を明らかにする。

静止座標系 xyz と回転する座標系 $x'y'z'$ の z 軸を南極から北極に向かう回転軸に選び、原点を地球の中心に一致させる。次に、静止座標系で見たある物体の速度を $\vec{v}$、回転する座標系 $x'y'z'$ でのその物体の速度を $\vec{v}'$ で表す。$\vec{v}'$ の $'$ は微分記号ではなく、二つの座標系を区別するためにつけられている。すると、$\vec{v}$ は、速度の合成則から、$\vec{v}'$ と回転速度 $\vec{v}_{\rm rot}$ を用いて、



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\rm rot}$$

と表せる。さらに、静止座標系の位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて回転速度を $\vec{v}_{\rm rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ と表し、上の式を書き換えると、

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{6}$$

となる。最後に、$\vec{v}$ と $\vec{v}'$ を、それぞれ静止座標系と回転座標系での時間微分

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \vec{v}' \equiv \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} \tag{7}$$

を用いて書き換えると、

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta \vec{r}'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{8}$$

の関係が得られる。(8) 式は、静止座標系と回転座標系の間での、ベクトルの時間微分の関係を表す式とみなすことができ、位置ベクトル以外の一般のベクトルについて成立する。

4　地球の回転運動と慣性力

地球の南極から北極に向かう軸を z 軸に選ぶ。地球は、この z 軸を回転軸として、角速度

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega), \qquad \omega = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 7.27 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad/s} \tag{9}$$

で回転している。我々の日常で経験する角速度と比べると非常に小さな値であるが、地球の半径が

$$R_{\rm e} = 6370\,\mathrm{km} = 6.37 \times 10^{6}\,\mathrm{m} \tag{10}$$

と大きいため、例えば赤道 (equator) 上では

$$v_{\rm rot}^{\rm eq} = 6.37 \times 10^{6} \times 7.27 \times 10^{-5}\,\mathrm{m/s} = 46.3\,\mathrm{m/s} \tag{11}$$

のように、桐生選手の走るスピードの約 4.63 倍もの速さで動いている。そして、地球上の様々な物理現象に深い影響を及ぼしている。

一定の角速度で運動する回転座標系での見かけの力を明らかにするために、(6) 式の両辺に $\dfrac{d}{dt}$ を作用すると、$\vec{\omega}$ が一定であることを考慮して、

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{12}$$

が得られる。さらに、この式の右辺を (8) 式を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\delta\vec{v}'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{\delta^2\vec{r}'}{\delta t^2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \tag{13}$$

となる。

(13) 式をニュートンの運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{14}$$

の左辺に代入すると、

$$m\left[\frac{\delta^2\vec{r}'}{\delta t^2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right] = \vec{F}$$

すなわち

$$m\frac{\delta^2\vec{r}'}{\delta t^2} = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \tag{15}$$

が得られる。右辺第二項と第三項が、回転座標系で現れる見かけの力、すなわち慣性力で、それぞれ遠心力 (centrifugal force) およびコリオリ力 (Coriolis force) と呼ばれている。

4.1 遠心力

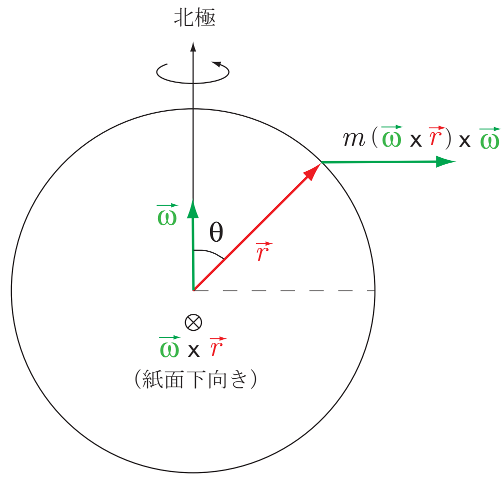
遠心力 $\vec{F}_{\mathrm{cen}}$ は

$$\vec{F}_{\mathrm{cen}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} \tag{16}$$

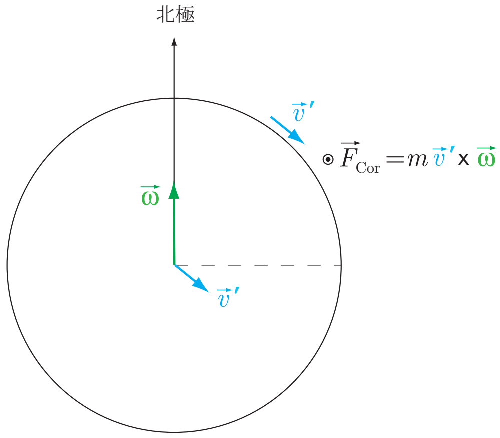
とベクトル積で表せる。その大きさは、回転軸と $\vec{r}$ のなす角 θ [rad] を用いて

$$F_{\mathrm{cen}} = m|(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}| = m\omega|\vec{\omega} \times \vec{r}| = m\omega^2 r \sin\theta \tag{17}$$

と表せる。ここで、$\vec{\omega} \times \vec{r}$ と $\vec{\omega}$ とが垂直であることを用いた (右図参照)。遠心力は、赤道で最大となり、両極点では消え、地球上での重力の違いの主な原因となっている。



4.2　コリオリ力

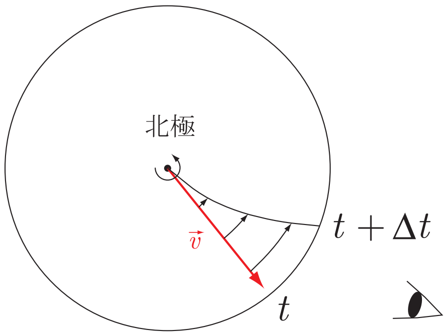


コリオリ力

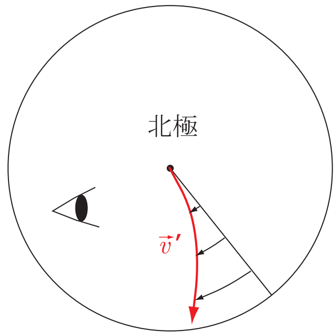
$$\vec{F}_{\mathrm{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} \tag{18}$$

は、地球の回転速度が緯度によって異なることに起因する見かけの力である。右図のように、北半球を地表面に沿って南進する。(18) 式によると、この場合、紙面に上向き、つまり西向きの力を受けることになる。

この慣性力は、直観的に次のように理解できる。北極から赤道上の定点に向けて、地球表面を直進することを考える（下図 (a)）。直進している間に地球は回転するので、南進する間に緯度が西方へと変化する。これを地球内の定点から見ると、北半球を南向きに進む場合には、あたかも、西向きに力を受けているように見える（下図 (b)）。

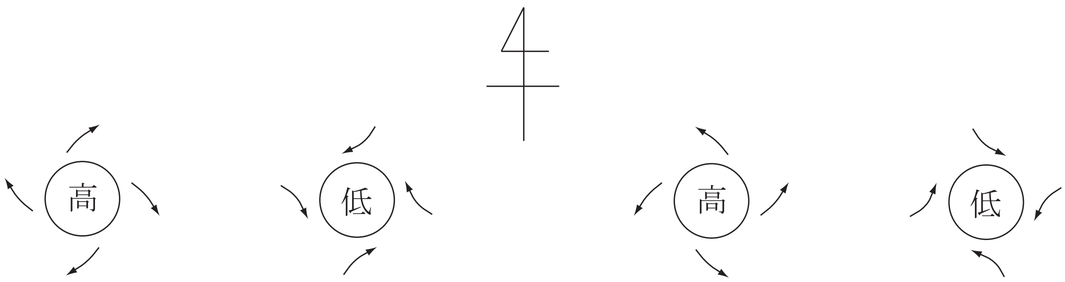


(a) 地球外の定点から見た北極から赤道への直進



(b) 地球内の定点から見た (a) の軌跡

コリオリ力は、高気圧や低気圧の渦のでき方を決定する主な要因となっている。人工衛星の画像からは、北半球と南半球で台風の渦巻きが逆になっているのが見て取れる。具体的に、北半球の低気圧は反時計回りに渦巻き、南半球の低気圧は時計回りの渦を形成する。これは、コリオリ力が風の進路に影響を与えたためである。



(a) 北半球　　(b) 南半球