§10 回転運動と角運動量保存則

今回の授業では、(i) 回転運動を記述するための数学、(ii) 角運動量と力のモーメントの概念、(iii) 角運動量保存則について学習する。角運動量保存則は、ケプラーの第二法則（面積速度一定の法則）を一般化した概念である。

1　ベクトル積（外積）

回転運動を記述する数学的準備として、まず、ベクトル積（外積）について学ぶ。二つのベクトル

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \tag{1}$$

のベクトル積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を次式で定義する。

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x). \tag{2}$$

ベクトル積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の幾何学的意味は、次のようにして理解できる。まず、ベクトル $\vec{a}$ の方向を新たな座標系 $x'y'z'$ の x' 方向に選び、かつ、$\vec{b}$ が $x'y'$ 平面内にあるようにする（下図参照）。二つの $\vec{a}$ と $\vec{b}$ により一つの平面が構成されるので、この操作は常に可能である。一方、ベクトルの長さは回転操作により変化しないので、この新たな座標系では、

$$\vec{a} = (a, 0, 0), \qquad \vec{b} = (b'_x, b'_y, 0) = (b\cos\theta, b\sin\theta, 0) \tag{3}$$

と表せる。ただし $a \equiv |\vec{a}|$、$b \equiv |\vec{b}|$ であり、また θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を表す。この座標系で $\vec{a} \times \vec{b}$ を (2) 式により計算すると、

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv (0, 0, ab'_y) = (0, 0, ab\sin\theta). \tag{4}$$

が得られる。この式より、$\vec{a} \times \vec{b}$ について次のことがわかる。

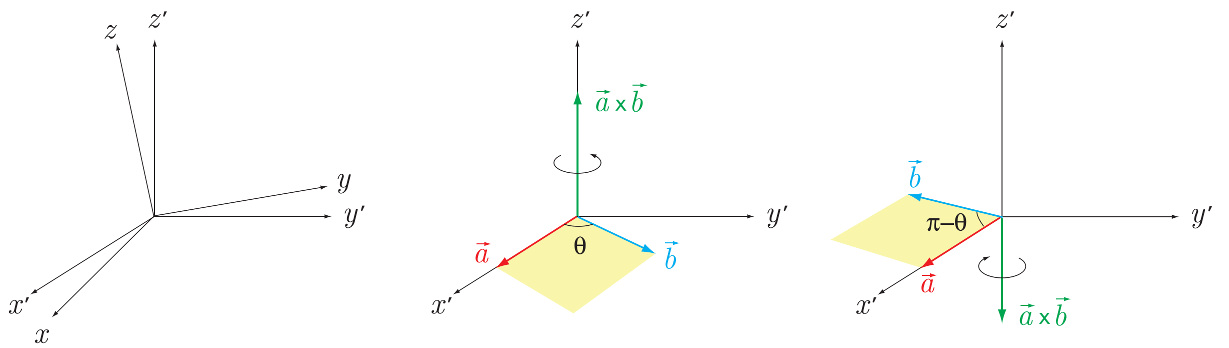
(a) 大きさ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ から作られる平行四辺形の面積に等しい。すなわち、

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab|\sin\theta| \tag{5}$$

が成立する。

(b) 方向は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の双方に垂直で、$\theta < \pi$ の時には $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へと右ネジの進む方向に向き、$\theta > \pi$ ではその反対方向である。

(a) より、平行な二つのベクトルのベクトル積はゼロとなること、特に、$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ が成立することが結論づけられる。



(a) 座標系の回転　　(b) ベクトル積 (θ<π の場合)　　(b) ベクトル積 (θ<π の場合)

2　回転運動の運動方程式

ベクトル積を用いて回転運動の方程式を導こう。出発点は再びニュートンの運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{6}$$

である。この式に右から $\vec{r}\times$ を作用させると、

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \tag{7}$$

が得られる。左辺を変形するために、次の公式を用いる。

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} \equiv \dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}}. \tag{8}$$

すなわち、微分操作とベクトル積の操作は可換である。証明は、成分表示 (2) の x 成分について次のように実行できる。

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})_x = \frac{d}{dt}(a_yb_z - a_zb_y) = \dot{a}_yb_z + a_y\dot{b}_z - \dot{a}_zb_y - a_z\dot{b}_y = (\dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}})_x$$

y、z 成分についても同様である。(8) 式を用いると、(7) 式の左辺は次のように書き換えられる。

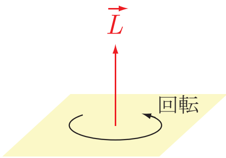
$$\begin{aligned}\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} &= m\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = m\left\{\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) - \dot{\vec{r}}\times\vec{v}\right\} = m\left\{\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) - \vec{v}\times\vec{v}\right\} \qquad \left(\vec{v}\times\vec{v}=\vec{0}\right)\\ &= m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}). \end{aligned} \tag{9}$$

この式を (7) 式に代入し、

$$\text{角運動量: } \vec{L}\equiv\vec{r}\times m\vec{v}, \qquad \text{力のモーメント: } \vec{N}\equiv\vec{r}\times\vec{F} \tag{10}$$

を用いて表すと、

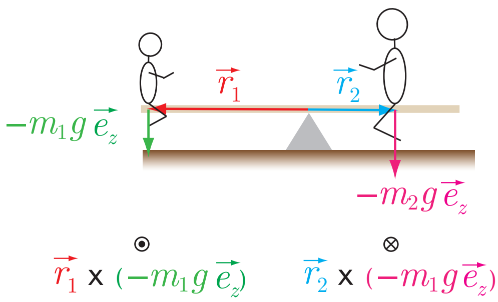
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{11}$$



となる。すなわち、角運動量の時間変化率は、質点に働く力のモーメントに等しい。これが回転運動を記述する方程式である。ベクトル $\vec{L}$ の方向は、回転軸に垂直で回転により右ネジの進む方向であり、またその大きさは回転の角速度に比例する。

(11) 式により、シーソー遊びや梃子の原理を記述することができる。右図のように、大人と子供がシーソーに乗り、釣り合っている状況を考える。子供と大人が座っている点に働く力のモーメントは、それぞれ

$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1\times(-m_1g\,\vec{e}_z), \qquad \vec{N}_2 = \vec{r}_2\times(-m_2g\,\vec{e}_z) \tag{12}$$

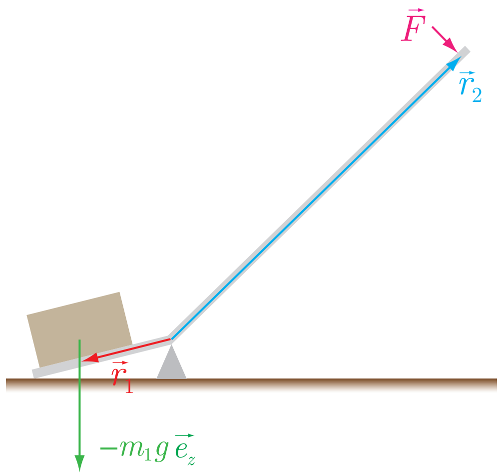


で、$\vec{N}_1$ は紙面に上向き、$\vec{N}_2$ は紙面に下向きと互いに逆を向いている。ただし、$\vec{e}_z\equiv(0,0,1)$ である。さらに、釣り合っている状況ではそれらの大きさも等しく、$m_1r_1 = m_2r_2$ が成立している。この釣り合いが破れた時、すなわち、$\vec{N}\equiv\vec{N}_1-\vec{N}_2\neq\vec{0}$ となった時、(11) 式に従う回転運動が始まる。

梃子の原理も (11) 式により記述できる。右図のように、石などの重い物体を、梃子を使って持ち上げることを考える。支点を中心とする力のモーメントは、それぞれ

$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1 \times (-m_1 g \vec{e}_z), \qquad \vec{N}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F} \tag{13}$$

である。支点の周りの回転運動により物体を持ち上げるには、$N_2 \geq N_1$ が成立する必要がある。小さい力でこの条件を満たすためには、支点と力の作用点の間の距離 r_2 を大きくすれば良い。



3　角運動量保存則

(10) 式により定義された力のモーメントがゼロとなっている場合、すなわち

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

の場合には、

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

が成立する。これを角運動量保存則といい、「角運動量 $\vec{L}$ は時間変化しない」あるいは「角運動量は保存する」と表せる。角運動量が保存するのは、次の二つの場合である。

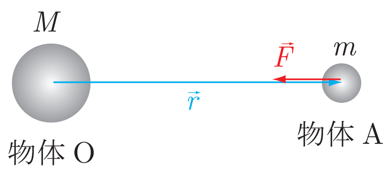
(a) 力が働かない（$\vec{F} = \vec{0}$ の）場合。

(b) 力は有限 ($\vec{F} \neq \vec{0}$) であるが、位置ベクトルと平行 ($\vec{F} \parallel \vec{r}$) で、力のモーメントが消失する ($\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ の) 場合。

(b) の性質を持つ力の場を中心力場という。中心力場では角運動量が保存する。

中心力場の典型例としては、万有引力の法則に従う重力がある。質量 m の物体 A が質量 M の物体 O から受ける力 $\vec{F}$ は、物体 O からの位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて、

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \tag{14}$$



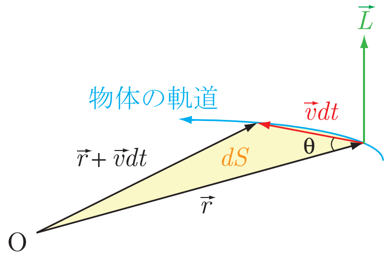
と表すことができる。この力 $\vec{F}$ は $\vec{r}$ に比例しているので、対応する物体 A の運動で角運動量

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times m\vec{v}$$

が保存することが結論づけられる。

角運動量保存則は、「面積速度一定の法則」と言い換えることができる。右図のように、時刻 t において物体は位置 $\vec{r}$ にあり、それから微小時間 dt が経過する間に、$d\vec{r} = \vec{v}dt$ だけ移動したものとする。すると、$\vec{r}$、$\vec{v}dt$、原点 O から構成される三角形の面積 dS は、$\vec{r}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ として、次のように変形できる。

$$dS = \frac{r\,vdt\,\sin\theta}{2} = \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|}{2}dt = \frac{|\vec{r} \times m\vec{v}|}{2m}dt = \frac{L}{2m}dt.$$



すなわち、面積速度 $\dot{S} \equiv \dfrac{dS}{dt}$ は、角運動量の大きさ L を用いて、

$$\dot{S} = \frac{L}{2m}$$

と表せる。従って、角運動量保存則の大きさに関する部分は、面積速度一定の法則とも言い換えることができる。

4　対称性と保存則の関連—ネータの定理

これまで、（力学的）エネルギー保存則、運動量保存則、角運動量保存則という三つの保存則について学んできた。これらの保存則は、いつでも成り立つわけではない。それでは、どのような場合に成り立つのであろうか。

この一般的な問題を、系の持つ対称性と関連づけて数学的に明らかにしたのが、ユダヤ系ドイツ人の女性数学者であるネータ (1882-1935) である。

- 時間が経っても系の性質が変化しなければ、すなわち、時間に関する並進対称性があれば、エネルギーは保存する。
- 位置が変化しても系の性質が変化しなければ、すなわち、空間に関する並進対称性があれば、運動量は保存する。
- 空間を回転しても系の性質が変化しなければ、すなわち、空間に関する回転対称性があれば、角運動量は保存する。

ネータは、これらの内容を、変分法という数学的手法を用いて証明した。その定理は「ネータの定理」と呼ばれている。