10　回転運動と角運動量保存則

今回の授業では，(i) 回転運動を記述するための数学，(ii) 角運動量と力のモーメントの概念，(iii) 角運動量保存則について学習する．角運動量保存則は，ケプラーの第二法則（面積速度一定の法則）を一般化した概念である．

10.1　ベクトル積（外積）

回転運動を記述する数学的準備として，まず，ベクトル積（外積）について学ぶ．二つのベクトル

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \tag{10.1}$$

のベクトル積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を次式で定義する．

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x). \tag{10.2}$$

ベクトル積 $\vec{a} \times \vec{b}$ の幾何学的意味は，次のようにして理解できる．まず，ベクトル $\vec{a}$ の方向を新たな座標系 $x'y'z'$ の x' 方向に選び，かつ，$\vec{b}$ が $x'y'$ 平面内にあるようにする（下図参照）．二つの $\vec{a}$ と $\vec{b}$ により一つの平面が構成されるので，この操作は常に可能である．一方，ベクトルの長さは回転操作により変化しないので，この新たな座標系では，

$$\vec{a} = (a, 0, 0), \qquad \vec{b} = (b'_x, b'_y, 0) = (b\cos\theta, b\sin\theta, 0) \tag{10.3}$$

と表せる．ただし $a \equiv |\vec{a}|$，$b \equiv |\vec{b}|$ であり，また θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を表す．この座標系で $\vec{a} \times \vec{b}$ を (10.2) 式により計算すると，

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv (0, 0, ab'_y) = (0, 0, ab\sin\theta). \tag{10.4}$$

が得られる．この式より，$\vec{a} \times \vec{b}$ について次のことがわかる．

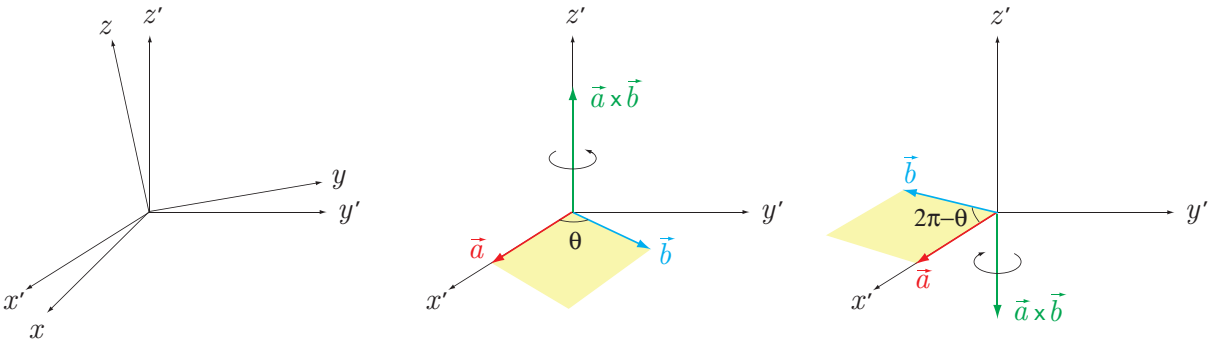
(a) 大きさ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ から作られる平行四辺形の面積に等しい．すなわち，

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab|\sin\theta| \tag{10.5}$$

が成立する．

(b) 方向は，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の双方に垂直で，$\theta < \pi$ の時には $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へと右ネジの進む方向に向き，$\theta > \pi$ ではその反対方向である．

(a) より，平行な二つのベクトルのベクトル積はゼロとなること，特に，$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ が成立することが結論づけられる．



(a) 座標系の回転　(b) ベクトル積（θ<π の場合）　(c) ベクトル積（θ>π の場合）

10.2　回転運動の運動方程式

ベクトル積を用いて回転運動の方程式を導こう．出発点は再びニュートンの運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{10.6}$$

である．この式に左から $\vec{r}\times$ を作用させると，

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \tag{10.7}$$

が得られる．左辺を変形するために，次の公式を用いる．

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} \equiv \dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}}. \tag{10.8}$$

すなわち，微分操作とベクトル積の操作は可換である．証明は，成分表示 (10.2) の x 成分について次のように実行できる．

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})_x = \frac{d}{dt}(a_y b_z - a_z b_y) = \dot{a}_y b_z + a_y\dot{b}_z - \dot{a}_z b_y - a_z\dot{b}_y = (\dot{\vec{a}}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dot{\vec{b}})_x$$

y，z 成分についても同様である．(10.8) 式を用いると，(10.7) 式の左辺は次のように書き換えられる．

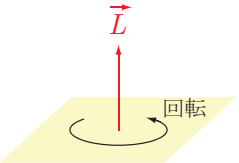
$$\begin{aligned}\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} &= m\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = m\left\{\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) - \dot{\vec{r}}\times\vec{v}\right\} = m\left\{\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) - \vec{v}\times\vec{v}\right\} \qquad \left(\vec{v}\times\vec{v} = \vec{0}\right)\\ &= m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}).\end{aligned} \tag{10.9}$$

この式を (10.7) 式に代入し，

$$\textbf{角運動量:}\ \vec{L} \equiv \vec{r}\times m\vec{v}, \qquad \textbf{力のモーメント:}\ \vec{N} \equiv \vec{r}\times\vec{F} \tag{10.10}$$

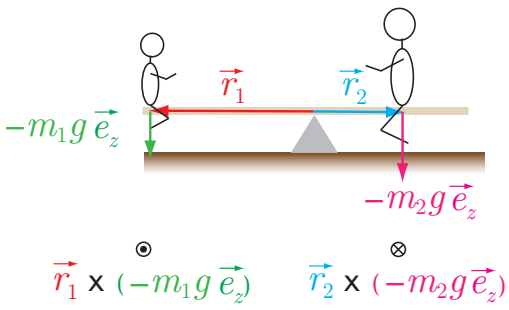
を用いて表すと，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{10.11}$$



となる．すなわち，角運動量の時間変化率は，質点に働く力のモーメントに等しい．これが回転運動を記述する方程式である．ベクトル $\vec{L}$ の方向は，回転面に垂直で回転により右ネジの進む方向であり，またその大きさは回転の角速度に比例する．

(10.11) 式により，シーソー遊びや梃子の原理を記述することができる．右図のように，大人と子供がシーソーに乗り，釣り合っている状況を考える．子供と大人が座っている点に働く力のモーメントは，それぞれ



$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1\times(-m_1 g\,\vec{e}_z) \tag{10.12a}$$

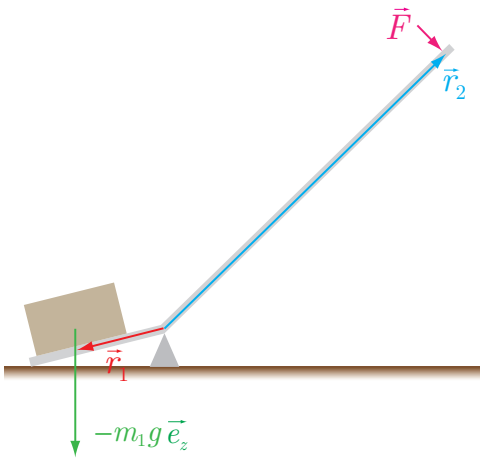
$$\vec{N}_2 = \vec{r}_2\times(-m_2 g\,\vec{e}_z) \tag{10.12b}$$

で，$\vec{N}_1$ は紙面に上向き，$\vec{N}_2$ は紙面に下向きと互いに逆を向いている．ただし，$\vec{e}_z \equiv (0,0,1)$ である．さらに，釣り合っている状況ではそれらの大きさも等しく，$m_1 r_1 = m_2 r_2$ が成立している．この釣り合いが破れた時，すなわち，$\vec{N} \equiv \vec{N}_1 - \vec{N}_2 \neq \vec{0}$ となった時，(10.11) 式に従う回転運動が始まる．

梃子の原理も (10.11) 式により記述できる．右図のように，石などの重い物体を，梃子を使って持ち上げることを考える．支点を中心とする力のモーメントは，それぞれ

$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1 \times (-m_1 g \vec{e}_z), \qquad \vec{N}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F} \tag{10.13}$$

である．支点の周りの回転運動により物体を持ち上げるには，$N_2 \geq N_1$ が成立する必要がある．小さい力でこの条件を満たすためには，支点と力の作用点の間の距離 r_2 を大きくすれば良い．



10.3 角運動量保存則

(10.10) 式により定義された力のモーメントがゼロとなっている場合，すなわち

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$$

の場合には，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

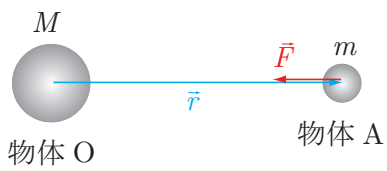
が成立する．これを**角運動量保存則**といい，「角運動量 $\vec{L}$ は時間変化しない」あるいは「角運動量は保存する」と表せる．角運動量が保存するのは，次の二つの場合である．

(a) 力が働かない（$\vec{F} = \vec{0}$ の）場合．

(b) 力は有限 ($\vec{F} \neq \vec{0}$) であるが，位置ベクトルと平行 ($\vec{F} \parallel \vec{r}$) で，力のモーメントが消失する ($\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ の) 場合．

(b) の性質を持つ力の場を**中心力場**という．中心力場では角運動量が保存する．

中心力場の典型例としては，万有引力の法則に従う重力がある．質量 m の物体 A が質量 M の物体 O から受ける力 $\vec{F}$ は，物体 O からの位置ベクトル $\vec{r}$ を用いて，



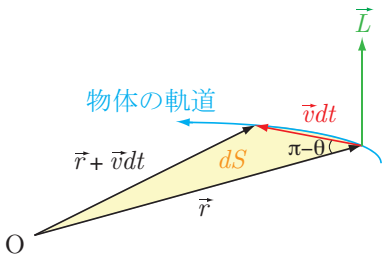
$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \tag{10.14}$$

と表すことができる．この力 $\vec{F}$ は $\vec{r}$ に比例しているので，対応する物体 A の運動で角運動量

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times m\vec{v}$$

が保存することが結論づけられる．

角運動量保存則は，「面積速度一定の法則」と言い換えることができる．右図のように，時刻 t において物体は位置 $\vec{r}$ にあり，それから微小時間 dt が経過する間に，$d\vec{r} = \vec{v}dt$ だけ移動したものとする．すると，$\vec{r}$，$\vec{v}dt$，原点 O から構成される三角形の面積 dS は，$\vec{r}$ と $\vec{v}$ のなす角を θ として，次のように変形できる．



$$dS = \frac{r\,vdt\,\sin(\pi-\theta)}{2} = \frac{|\vec{r}\times\vec{v}|}{2}dt = \frac{|\vec{r}\times m\vec{v}|}{2m}dt = \frac{L}{2m}dt.$$

すなわち，面積速度 $\dot{S} \equiv \dfrac{dS}{dt}$ は，角運動量の大きさ L を用いて，

$$\dot{S} = \frac{L}{2m}$$

と表せる．従って，角運動量保存則の大きさに関する部分は，面積速度一定の法則とも言い換えることができる．

10.4　対称性と保存則の関連—ネータの定理

これまで，（力学的）エネルギー保存則，運動量保存則，角運動量保存則という三つの保存則について学んできた．これらの保存則は，いつでも成り立つわけではない．それでは，どのような場合に成り立つのであろうか．

この一般的な問題を，系の持つ対称性と関連づけて数学的に明らかにしたのが，ユダヤ系ドイツ人の女性数学者であるネータ (1882-1935) である．

- 時間が経っても系の性質が変化しなければ，すなわち，時間に関する並進対称性があれば，エネルギーは保存する．
- 位置が変化しても系の性質が変化しなければ，すなわち，空間に関する並進対称性があれば，運動量は保存する．
- 空間を回転しても系の性質が変化しなければ，すなわち，空間に関する回転対称性があれば，角運動量は保存する．

ネータは，これらの内容を，変分法という数学的手法を用いて証明した．その定理は「ネータの定理」と呼ばれている．